

Ações de grupos em álgebras de polinômios e problemas de classificação

Charles Almeida

Aula 1

Motivação: Mergulho de álgebras; Uma pergunta natural quando investigamos álgebras e módulos é a seguinte: Dado uma álgebra A , podemos encontrar uma álgebra R (com propriedades melhores) tal que A é subálgebra de R ? Mais precisamente, o seguinte problema foi extensivamente estudado:

Pergunta:. Dada uma álgebra A , e um inteiro n , para quais álgebras, sob quais condições A pode ser mergulhado no anel de matrizes $M_n(R)$ com R sendo um anel comutativo?

Uma condição necessária para a existência de tal mergulho é que a álgebra A também satisfaça as identidades polinomiais que são satisfeitas pelas matrizes $n \times n$.

O problema de determinar quais álgebras podem ser mergulhadas em álgebras de matrizes foi extensivamente estudado por Artin, Procesi, Posner, e está intimamente ligado ao problema de estudar sub-álgebras invariantes pela ação do grupo de matrizes inversíveis, como pode ser visto pelo resultados obtidos por Procesi em [3] e mais recentemente em Diogo Claudemir e Plamen em [1].

Neste micro-curso estaremos interessados no estudo da estrutura deste aneis de invariantes.

Na aula de hoje estaremos apresentarei os conceitos iniciais da teoria de invariantes, como representações lineares de grupos, anel de funções coordenadas de um espaço vetorial e o anel de invariantes.

1 Funções regulares

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, um corpo de característica zero, $V^\vee$ seu dual, isto é o espaço dos funcionais lineares $\{f : V \rightarrow \mathbb{K}\}$. Interpretando os elementos de $V^\vee$ como funções sobre V , e considerando o produto das funções ponto a ponto, podemos considerar a álgebra de todas as $\mathbb{K}$ -lineares combinações de funções de produtos de elementos de $\mathbb{K}$.

Definição 1. O anel de coordenadas de $\mathcal{O}(V)$ do espaço vetorial V é a álgebra das funções $F : V \rightarrow \mathbb{K}$ gerada pelos elementos de $V^\vee$. Os elementos de $\mathcal{O}(V)$ são chamados *funções regulares* de V .

Fixe uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V . Considere os elementos $x_i \in \mathcal{O}(V)$, tal que $x_i(e_j) = \delta_{i,j}$, onde $\delta_{i,j}$ denota o delta de Kronecker.

Exercício 1. Prove que se $\dim V = n$, então $\mathcal{O}(V) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Ademais prove que $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é uma álgebra de polinômios. (Os elementos x_i são algébricamente independentes sobre $\mathbb{K}$).

Definição 2. Dizemos que $f \in \mathcal{O}(V)$, é uma função *homogênea de grau d* se $f(tv) = t^d f(v)$ para todo $v \in V$ e todo $t \in \mathbb{K}$.

Exercício 2. Prove que toda função $f \in \mathcal{O}(V)$ pode ser escrita como $f = c_0 + c_1 f_1 + \dots + c_k f_k$, onde $c_i \in \mathbb{K}$ e f_i é um polinômio homogêneo de grau i . Ademais, mostre que essa decomposição é única (a menos de c_0).

Assim, podemos escrever $\mathcal{O}(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{O}(V)_d$ onde $\mathcal{O}(V)_d = \{f \in \mathcal{O}(V), \deg f = d\}$ de modo que $\mathcal{O}(V)$ tenha estrutura de uma álgebra graduada.

2 Revisão Representação de Grupos

Para qualquer espaço vetorial V denotaremos por $GL(V)$ o espaços das transformações lineares de $T : V \rightarrow V$. Quando fixamos uma base de V podemos identificá-lo com $\mathbb{K}^n$, e $Gl(V)$ com o conjunto das matrizes invertíveis $GL(n, \mathbb{K})$ de ordem n .

Definição 3. Seja G um grupo. Uma **representação** de G é um par (ρ, V) , onde V é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{K}$) e $\rho : GL(V)$ é um homomorfismo de grupos. Diremos que G é uma **representação racional**, se $\dim V < \infty$ e os coeficientes da matriz de $\rho(g)$ são funções regulares para todo $g \in G$.

Definição 4. Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma **ação de G em X** , é uma função $\varphi : G \times X \rightarrow X$, definida por $\varphi(g, x) = gx$, com $g \in G$ e $x \in X$, satisfazendo as seguintes condições:

1. $\varphi(e, x) = x$, para todo $x \in X$;
2. $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$.

Notação: $G \curvearrowright X$.

Um espaço vetorial V munido com uma ação de um grupo G é dito G -módulo.

Exemplo 1. Dada uma ação $\alpha : G \times V \rightarrow V$ o mapa $g \rightarrow \alpha(g, -)$ é uma representação de G em V . Reciprocamente, se ρ é uma representação de G em V então o mapa $(g, v) \rightarrow \rho(g).v$ define uma ação de G em V . Para essas ações vamos escrever $g.v$ invés de $\rho(g)v$.

Definição 5. Seja V um G -módulo. Diremos que $f \in \mathcal{O}(V)$ é G -invariante se $f(gv) = f(v)$ para todo $v \in V$. Denotaremos por $\mathcal{O}(V)^G \subset \mathcal{O}(V)$ a subálgebra das funções invariantes de V .

Cabe ressaltar que a ação de G em V induz uma ação de G em $\mathcal{O}(V)$. De fato, se $g \in G, f \in \mathcal{O}(V)$ então $(gf)(v) := f(g^{-1}.v)$

Seja (ρ, V) uma representação racional de G , e $W \subset V$, então W é dito G -**invariante** se $\rho(g)w \in W$ para todo $w \in W$. Neste caso é fácil ver que obtemos uma representação σ de W , restringindo a ρ a W . Também conseguimos uma representação $(\tau, V/W)$ fazendo $\tau(g)(v + W) = \rho(g)v + W$. Se tomamos uma base pra W e completamos para uma base de V , podemos escrever a matriz de ρ nesta base como

$$\rho(g) = \begin{bmatrix} \sigma(g) & * \\ 0 & \tau(g) \end{bmatrix}$$

Esta matriz prova que (σ, W) e $(\tau, V/W)$ são representações regulares.

Isto motiva a seguinte definição

Definição 6. Dizemos que uma representação (ρ, V) de G é **redutível**, se existe $W \subset V$ tal que W é G -invariante. Se (ρ, V) não é redutível, dizemos que é uma representação **irredutível**.

Definição 7. Seja G um grupo algébrico linear. Dizemos que uma representação racional (ρ, V) de G é **completamente redutível** se para todo subespaço invariante $W \subset V$, existe um subespaço G -invariante U tal que $V = W \oplus U$. Isto implica que podemos escrever a matriz de $\rho(g)$ como uma matriz em bloco para cada $g \in G$.

Definição 8. Sejam $(\rho, V), (\tau, W)$ duas representações de G .

Um G -**homomorfismo** é uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ tal que $T\rho(g) = \tau(g)T$ para todo $g \in G$. T também é dito **homomorfismo de G -módulos**, e o conjunto de todos os G -homomorfismos é denotado por $\text{Hom}_G(V, W)$. Diremos que duas representações $(\rho, V), (\tau, W)$ são **equivalentes** se existe $T \in \text{Hom}_G(V, W)$ invertível.

Exemplo 2. Sejam $G = \mathbb{Z}_2$ e $V = \mathbb{R}^2$. Considere a representação $\rho(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\rho(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^2 \{e_1, e_2\}$, é fácil ver que $e_+ = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ e $e_- = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$ são G -invariantes, tomando a matriz $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

Obtemos a representação equivalente $\rho'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\rho'(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Segue que $(\rho', \mathbb{R}^2) = (\rho_0, \mathbb{R}) \oplus (\rho_1, \mathbb{R})$, onde $(\rho_0, \mathbb{R})$ corresponde a representação associada a identidade.

Seja (ρ, V) uma representação de G completamente redutível, então V se decompõe como soma direta de irredutíveis W_i . Agrupando todas as subrepresentações irredutíveis isomorfas, podemos escrever $(\rho, V) = (\rho_i^{n_i}, \oplus W_i^{\oplus n_i})$, onde n_i é dita **multiplicidade** de W_i . Deste modo temos que $V = \oplus V_k$, com

cada $V_k = W_k^{n_k}$. Tal decomposição de V é dita **decomposição isotípica**. (É necessário demonstrar que n_k está bem definido e que a decomposição é única).

Para que evitemos a linguagem de esquemas, trabalharemos com grupos algébricos lineares, ao invés de grupos algébricos.

Definição 9. Seja G um grupo. G é dito **grupo algébrico linear** se $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ e um conjunto de funções $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(\mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{K}))$, tal que

$$G = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}); f(g) = 0; \forall g \in \mathcal{A}\}.$$

Exemplo 3. É claro que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ é grupo algébrico linear. Basta considerar a $\mathcal{A}$ como sendo a função nula.

Exemplo 4. $\mathrm{SL}(n, \mathbb{K})$ é grupo algébrico linear, gerado por uma única equação ($f = \det g - 1$).

Exemplo 5. $\mathrm{D}(n, \mathbb{K})$, o grupo das matrizes diagonais é grupo algébrico linear, gerado pelas equações $(x_{i,j}(g) = 0)$.

Definição 10. Um grupo algébrico linear G é dito **reduutivo**, se toda representação racional de (ρ, V) é completamente redutível.

Enfatizar aqui que preciso char $\mathbb{K} = 0$ pois a definição de reduutivo é mais complicada pro caso geral.

É possível provar que $\mathrm{GL}(V), \mathrm{O}(V), \mathrm{Sp}(V) \dots$ são redutivos.

Também é possível provar que todo grupo finito é (algébrico e) reduutivo.

Podemos agora enunciar o resultado principal desse microcurso.

Theorem 1. *Sejam G um grupo linear algébrico reduutivo, V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, e $\alpha : G \times V \rightarrow V$ uma ação racional. Então $\mathcal{O}(V)^G$ é um $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada.*

Uma referência sugerida para os assuntos discutidos hoje é [2].

Referências

- [1] C. Fidelis, D. Diniz, and P. Koshlukov. Embeddings for the Jordan algebra of a bilinear form. *Adv. Math.*, 337:294–316, 2018.
- [2] R. Goodman and N. R. Wallach. *Symmetry, representations, and invariants*, volume 255 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Dordrecht, 2009.
- [3] C. Procesi. A formal inverse to the cayley-hamilton theorem. *Journal of Algebra*, 107(1):63 – 74, 1987.