

Ações de grupos em álgebras de polinômios e problemas de classificação

Charles Almeida

Aula 2

Exemplo 1. Sejam $G = \mathbb{Z}_2$ e $V = \mathbb{R}^2$. Considere a representação $\rho(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\rho(1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Considerando a base canônica de $\mathbb{R}^2$ $\{e_1, e_2\}$, é fácil ver que $e_+ = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$ e $e_- = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}$ são G -invariantes, tomando a matriz $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

Obtemos a representação equivalente $\rho'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e $\rho'(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Segue que $(\rho', \mathbb{R}^2) = (\rho_0, \mathbb{R}) \oplus (\rho_1, \mathbb{R})$, onde $(\rho_0, \mathbb{R})$ corresponde a representação associada a identidade.

Seja (ρ, V) uma representação de G completamente redutível, então V se decompõe como soma direta de irredutíveis W_i . Agrupando todas as subrepresentações irredutíveis isomorfas, podemos escrever $(\rho, V) = (\rho_i^{n_i}, \oplus W_i^{\oplus n_i})$, onde n_i é dita **multiplicidade** de W_i . Deste modo temos que $V = \oplus V_k$, com cada $V_k = W_k^{n_k}$. Tal decomposição de V é dita **decomposição isotópica**. (É necessário demonstrar que n_k está bem definido e que a decomposição é única).

Observação Ontem definimos grupos algébricos lineares como sendo subgrupos de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ que podem ser obtidos como zeros de polinômios em $M(n, \mathbb{K})$. Considerando um isomorfismo dado por $\varphi : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K})$ dado a partir da escolha de uma base de V , dizemos que $G \subset \text{GL}(V)$ é grupo linear algébrico se $\varphi(G)$ é um grupo linear algébrico.

Definição 1. Seja $G = \text{GL}(n, \mathbb{K})$. Definimos a álgebra de funções regulares de $\text{GL}(n, \mathbb{K})$ como sendo

$$\mathcal{O}(\text{GL}(n, \mathbb{K})) = \mathbb{K}[x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{n,n}, \det(x)^{-1}],$$

onde $\det(x)$ é expresso como um polinômio nas variáveis $\{x_{1,1}, \dots, x_{n,n}\}$.

Seja $\varphi : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{K})$ um isomorfismo dado a partir de uma escolha de base para V . A álgebra de funções regulares $\mathcal{O}(\text{GL}(V))$ é gerada pelos elementos da forma $\varphi \circ f$. (Prove que $\mathcal{O}(\text{GL}(V))$ não depende da escolha de φ).

Sejam $\psi : G \rightarrow H$ uma função entre grupos algébricos. Para cada $f \in \mathcal{O}(H)$ definimos a função $\psi^*(f) = f \circ \psi$.

Definição 2. Sejam G e H grupos algébricos lineares. Dizemos que $\psi : G \rightarrow H$ é um mapa regular se $\psi^*(\mathcal{O}(H)) \subset \mathcal{O}(G)$.

Definição 3. Dada uma representação (ρ, V) de um grupo algébrico linear, dizemos (ρ, V) é uma representação **racional** se $\dim V < \infty$ e $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ é um mapa regular. Dizemos que uma ação $\alpha : G \times V \rightarrow V$ é racional se é compatível com V e a representação associada é racional.

Definição 4. Um grupo algébrico linear G é dito **redutivo**, se toda representação racional de (ρ, V) é completamente redutível.

Não é difícil provar que a restrição de ρ a cada subespaço invariante também é uma representação racional.

Enfatizar aqui que preciso char $\mathbb{K} = 0$ pois a definição de redutivo é mais complicada pro caso geral.

É possível provar que $\mathrm{GL}(V), \mathrm{O}(V), \mathrm{Sp}(V) \dots$ são redutivos.

Também é possível provar que todo grupo finito é (algébrico e) redutivo.

As definições e resultados da aula anterior nos permitem introduzir a seguinte definição.

Sejam $\mathcal{A}$ uma $\mathbb{K}$ -álgebra associativa munida de uma ação compatível (com a estrutura de espaço vetorial) por um grupo algébrico linear G (Isto é, existe uma representação de $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{A})$). Seja $\mathcal{A}^G = \{a \in \mathcal{A}; \rho(g).a = a, \forall g \in G\}$. É claro que $\mathcal{A}^G$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$.

Definição 5. Um mapa linear $\mathcal{R} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^G$ é dito **operador de Reynolds** se satisfaz as seguintes condições:

- $\mathcal{R}$ é sobrejetivo;
- Para todo $a \in \mathcal{A}^G$, e todo $b \in \mathcal{A}$, temos que $\mathcal{R}(ab) = a\mathcal{R}(b)$.

O seguinte lema garante a existência de um operador de Reynolds na situação em que estaremos interessados.

Lemma 1. *Sejam G um grupo linear algébrico redutivo, V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, e $\alpha : G \times V \rightarrow V$ uma ação racional. Então $\mathcal{O}(V)$ admite um operador de Reynolds.*

Demonstração. Seja (π, V) a representação racional de G induzida pela ação α . Definimos uma representação de G na álgebra (visto como espaço vetorial) $\mathcal{O}(V)$. da seguinte maneira:

$$\rho(g)f(v) := f(\pi(g^{-1})v)$$

Considere a decomposição $\mathcal{O}(V) = \bigoplus_k \mathcal{O}(V)_k$ em componentes homogêneas. Note que cada componente $\mathcal{O}(V)_k$ tem **dimensão finita** e é G -invariante.

De fato para cada $f \in \mathcal{O}(V)_k$, $t \in \mathbb{K}$, e $g \in G$, temos

$$\rho(g)f(tv) = f(\pi(g^{-1})tv) = f(t\pi(g^{-1})v) = t^k f(\pi(g^{-1})v) = t^k \rho(g)f(v).$$

Assim, considere a ρ_k a restrição de ρ a $\mathcal{O}(V)_k$. Como G é reutivo, então $(\rho_k, \mathcal{O}(V)_k)$ é completamente redutível, e existe uma decomposição isotópica

$$\mathcal{O}(V)_k = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{G}} W_{(\sigma)},$$

onde $\widehat{G}$ é o conjunto das classes de equivalência de representações racionais de $\mathcal{O}(V)_k$, e W_{σ} é a σ -isotópica componente de $\mathcal{O}(V)_k$.

Seja $f \in \mathcal{O}(V)$, podemos escrever $f = f_0 + \cdots + f_s$, com cada f_i é um polinômio homogêneo de grau i . Ademais, decompondo cada f_k como acima, e agrupando os termos com o mesmo σ , podemos escrever

$$f = \sum_{\sigma \in \widehat{G}} f_{\sigma}$$

Denote por $f^{\#}$ a componente isotópica de f correspondente a representação trivial. Defina para todo $f \in \mathcal{O}(V)$, $\mathcal{R}(f) = f^{\#}$. O mapa está bem definido pois $f^{\#} \in \mathcal{O}(V)^G$ por definição. Além disso é claro que é linear e sobrejetivo. Vamos provar a segunda condição. Como multiplicação por elementos G -invariantes deixa subespaços isotópicos invariantes, temos que se $f \in \mathcal{O}(V)$ e $g \in \mathcal{O}(V)^G$

$$\mathcal{R}(gf) = (gf)^{\#} = g(f)^{\#} = g\mathcal{R}(f),$$

como queríamos. □