

Ações de grupos em álgebras de polinômios e problemas de classificação

Charles Almeida

Aula 3

Antes de demonstrarmos o nosso resultado principal, enunciaremos o Teorema da Base de Hilbert, que será fundamental.

Teorema 1 (Base de Hilbert). *Seja A um anel Noetheriano, então $A[x]$ é Noetheriano.*

Corolário 1. *Todo ideal do anel $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ é finitamente gerado.*

Teorema 2. *Sejam G um grupo linear algébrico reutivo, V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, e $\alpha : G \times V \rightarrow V$ uma ação racional. Então $\mathcal{O}(V)^G$ é um $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada.*

Demonstração. Considerando $\mathcal{O}(V)$ como um $\mathcal{O}(V)^G$ -módulo, segue da definição do Lema anterior que $\mathcal{R} : \mathcal{O}(V) \rightarrow \mathcal{O}(V)$, tal que $\mathcal{R}(f) = f^\#$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}(V)^G$ -módulos.

Note que toda função $f \in \mathcal{O}(V)$, G -invariante, está contida na componente isotópica a identidade da decomposição de $\mathcal{O}(V)$. Portanto, se $\mathcal{R}$ é nulo, temos que $\mathcal{O}(V)^G = 0$ que é finitamente gerado.

Assuma a partir de agora que $\mathcal{R}$ é não nulo.

Considere $I \subset \mathcal{O}(V)^G \subset \mathcal{O}(V)$ o conjunto das funções G -invariantes sem termo constante, (isto é, $f = f_s + \dots + f_l$, e $s \geq 1$).

Afirmção 1: I é um ideal. **Prova:** exercício.

Pelo Teorema da base de Hilbert $\mathcal{O}(V)$ é finitamente gerado, e logo I é finitamente gerado como ideal de $\mathcal{O}(V)$. Sejam $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s\} \subset \mathcal{O}(V)^G$ tal que $I = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ como ideal.

Afirmção 2: $\mathcal{O}(V)^G = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ como $\mathbb{K}$ -álgebra.

Seja $f \in \mathcal{O}(V)^G$, vamos provar que existe um polinômio p em $\mathbb{K}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s]$ tal que $f = p(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$.

Procederemos por indução em grau de f . Se $\deg f = 0$, então $f = c$, com $c \in \mathbb{K}$, e claro que $p \equiv c$ satisfaz $f = p$.

Suponha que a afirmação é verdadeira para $g \in \mathcal{O}(V)^G$ tal que $\deg g \leq n-1$, e suponha $f \in \mathcal{O}(V)$ tal que $\deg f = n$. Então existem $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}(V)$ tal que

$$f = f_1\varepsilon_1 + \dots + f_s\varepsilon_s,$$

como $f \in \mathcal{O}(V)^G$, temos que $\mathcal{R}(f) = f$, logo:

$$f = \mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(f_1\varepsilon_1 + \cdots + f_s\varepsilon_s) = \mathcal{R}(f_1)\varepsilon_1 + \cdots + \mathcal{R}(f_s)\varepsilon_s,$$

uma vez que $\mathcal{R}$ é $\mathcal{O}(V)^G$ -homomorfismo. Como $\mathcal{R}(f_i) = f_i^\# \in \mathcal{O}(V)^G$, e como $\deg f_i^\# \leq \deg f_i < \deg f = n$, temos pela hipótese de indução que existem $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{K}[\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s]$, tal que $f_i = p_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$, logo

$$f = \sum_{i=1}^s p_i(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)\varepsilon_i,$$

e portanto $\mathcal{O}(V)^G$ é finitamente gerada como álgebra. $\square$

Para corpos de característica diferente de zero, existe a noção de grupo algébrico geometricamente reutivo e grupo algébrico linearmente reutivo. Em característica zero as 3 noções são equivalentes, em particular, se $\mathbb{K} = 0$, o teorema acima é o Teorema de Nagata.

O ponto fraco da demonstração do teorema anterior é que ele prova que $\mathcal{O}(V)^G$ é finitamente gerado mas não diz como construí $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_2)$.

Nagata deu um contra-exemplo onde a ação de um grupo não reutivo de modo que a álgebra de invariantes não é finitamente gerada.

Um pouco de geometria algébrica

Seja V um espaço vetorial. Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}(V)$, denotamos por

$$V(\mathcal{A}) := \{v \in V; f(v) = 0 \forall f \in \mathcal{A}\}$$

o **lugar de zeros de $\mathcal{A}$** . É possível mostrar que $V(\mathcal{A}) = V(\langle \mathcal{A} \rangle)$.

Um subconjunto $F \subset V$ é dito **conjunto algébrico afim** se existe ideal $I \subset \mathcal{O}(V)$ tal que

$$F = V(I)$$

É possível mostrar que existe uma bijeção entre conjuntos algébricos em V e ideais radicais de $\mathcal{O}(V)$. É possível definir em V uma topologia cuja família de fechados é composta por conjuntos algébricos afins. Tal topologia é dita topologia de Zariski.

Exercício 1. Descreve a topologia de Zariski em $\mathbb{C}$.

Seja $X \subset V$ um conjunto algébrico afim, dado por $X = V(I)$. Definimos $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(V)/I$.

Sejam X e Y conjuntos algébricos afins. Um mapa $\varphi : X \rightarrow Y$, é dito morfismo regular se $\varphi^*(\mathcal{O}(Y)) \subset \mathcal{O}(X)$. Não é difícil provar que φ é um mapa contínuo neste caso. É possível demonstrar que

Teorema 3. *Existe uma equivalência (contravariante) entre a categoria de conjuntos algébricos afins e $\mathbb{K}$ -álgebras finitamente geradas sem elementos nilpotentes.*

Traduzindo o teorema de Nagata para este contexto temos:

Seja G um grupo algébrico linear agindo racionalmente em V . Uma vez que $\mathcal{O}(V)^G \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$, temos pelo teorema anterior que existe $\pi : V \twoheadrightarrow Y$, onde Y é o conjunto algébrico afim associado a $\mathbb{K}$ -álgebra finitamente gerada $\mathcal{O}(V)^G$. Veremos a seguir que existem apesar de existirem situações em que Y não possui propriedades boas o suficientes, Y é o melhor que vamos conseguir.

Definição 1. Se G age em dois conjuntos X, Y , diremos que um mapa $\varphi : X \rightarrow Y$ é G -equivariante se $\varphi(g.x) = g.\varphi(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$.

Definição 2. Um quociente categórico para a ação de G em X é um morfismo regular G -invariante $\varphi : X \rightarrow Y$, tal que para qualquer outro morfismo G -invariante $f : X \rightarrow Z$, f se fatora de maneira única por φ , de modo que existe $h : Y \rightarrow Z$ tal que $f = \varphi \circ h$.

Teorema 4. *Seja V um espaço vetorial, G um grupo algébrico linear agindo racionalmente em V , e Y o conjunto algébrico afim associado a $\mathcal{O}(V)^G$. Então $\pi : V \rightarrow Y$ (o mapa induzido por $\mathcal{O}(Y) \hookrightarrow \mathcal{O}(V)$) é um quociente categórico.*

Se V é um espaço vetorial cujos pontos representam objetos que gostaríamos de classificar mediante uma relação de equivalência dada pelo grupo, o espaço das órbitas da ação seria o espaço que gostaríamos de entender. Muitas vezes este espaço não tem uma boa estrutura, mas o Teorema acima nos diz que Y é a "melhor aproximação" possível para o espaço de órbitas.

Exemplo 1. Seja $V = M_n(\mathbb{K})$, e $G = \mathbf{GL}(n, \mathbb{K})$. Gostaríamos de classificar matrizes em $M_n(\mathbb{K})$ a menos de equivalência, isto é, gostaríamos de classificar as matrizes A a menos de ação gAg^{-1} . A resposta para este problema de classificação é dada pela forma canônica de Jordan, onde cada matriz corresponde a uma única matriz decomposta em blocos de Jordan (a menos de permutação dos blocos). Apesar de esta decomposição ser satisfatória do ponto de vista de teoria dos conjuntos. Há alguma informação que estamos perdendo; Para o caso $n = 2$, note que

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

estão em órbitas diferentes, e que para todo $\epsilon > 0$ temos

$$\begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

e que está na órbita de A , mas fazendo $\epsilon \rightarrow 0$, vemos que B pertence ao fecho da órbita de A . Gostaríamos de entender porque.

Pelo que vimos acima $\pi : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})^{\mathbf{GL}_n(\mathbb{K})}$ corresponde a melhor aproximação para o espaço de órbitas. Se $s_1 = \text{Tr } A$ e $s_2 = \det A$, é possível

provar que $M_2(\mathbb{K})^{\text{GL}_2(\mathbb{K})} = \mathbb{K}[s_1, s_2]$. Assim é aproximação para o espaço de órbitas é dado por $\pi : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^2$, dado por $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow (a+d, ad-cb) = (s_1(A), s_2(A))$.

Se A possui autovalores iguais então $A(t) = t^2 - s_1(A)t + s_2$ possui discriminante igual a zero, isto é, $s_1(A)^2 = 4s_2(A)$. Essa condição determina uma curva fechada em $\mathbb{K}^2$ dada por $(x, y) \in \mathbb{K}^2$ tal que $x^2 - 4y = 0$

Se $p = (x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus C$, então $\pi^{-1}(p)$ consiste de um único ponto (a matriz diagonal (λ_1, λ_2) com $\lambda_i =$ solução da equação de segundo grau.

Se $p = (x, y) \in C$, então π^{-1} consiste de duas órbitas (diagonal lambda, ou matriz triangular superior).

Para descrevermos os pontos das órbitas como subconjuntos de M_2 , é conveniente que a projeção na primeira coordenada dependa de apenas uma variável, então é conveniente escrever

$$A = u(A)\text{diag}(1/2, 1/2) + v(A)\text{diag}(1/2, -1/2) + w(A)e_{21} + z(A)e_{12}$$

Assim temos para todo $p = (x, y)$ que

$$\pi^{-1}(p) = \{(u, v, w, z); u = x, v^2 + 4wz = x^2 - 4y\}$$