

Fórum sobre Planejamentos e Avaliações do PIC

Prezados Coordenadores, Professores e Alunos.

No Portal do PIC (<https://20pic.obmep.org.br/>) está disponibilizado um fórum de discussão sobre os Planejamentos e sobre as Avaliações do PIC.

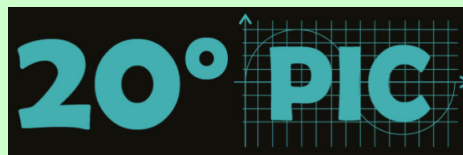
	Roteiro	Avaliação	Fórum
Ciclo	 	 	 

Utilize este fórum para:

- Fazer comentários sobre os roteiros e as avaliações.
- Sugerir assuntos ou problemas para serem incorporados nos roteiros.
- Compartilhar sugestões e boas ideias.
- Compartilhar os materiais utilizados na sua região: listas de problemas, resumos, apresentações em power-point, atividades, jogos, materiais complementares, etc.
- Publicar soluções interessantes dos problemas propostos.
- Informar erros encontrados nos materiais disponibilizados.
- Ler os comentários e baixar os materiais compartilhados pelos colegas do PIC.
- etc.

Preferimos que os comentários sobre os Planejamentos e as Avaliações sejam postados nesse Fórum.

Muito obrigado.
Comitê Acadêmico do PIC

Roteiro de Estudos**PIC 2026****G2 – CICLO 3 – ENCONTRO 1**

Assuntos a serem abordados nesse encontro:

- Princípios Aditivo e Multiplicativo: identificar, modelar e resolver situações-problemas correlatas aos princípios.

I - Textos para consultas:

- Apostila 2 do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho. [Clique aqui](#)
- Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra. B. Holanda, E. A. Chagas, IMPA, 2018. (Círculos de Matemática da OBMEP)
- Uma década do círculo Matemático de Berkeley – A Experiência Americana. S. Stankova, T. Rike. IMPA, 2018.
- Resolução de problemas na Sala de Aula. Y. Y. Baldin, A. F. Silva [Clique aqui](#)

II - Videoaulas do Portal da Matemática (com textos integrados):

- Portal da OBMEP. Princípios Básicos de Contagem. [Clique aqui](#)
- Portal da OBMEP. Resolução de Problemas na Sala de Aula. [Clique aqui](#)

Caro professor, embora os problemas de contagem sejam, muitas vezes, considerados difíceis pelos estudantes e mesmo por professores, sugerimos que sejam trabalhadas as técnicas de contagem que emergem naturalmente das operações elementares com números naturais e seus significados. Mais do que o domínio de fórmulas prontas e complicadas, estamos propondo cuidado na escolha de problemas que favoreçam o desenvolvimento de raciocínios de contagem que se aplica em geral e que os próprios estudantes podem conseguir formular com alguma ajuda sua.

Neste sentido, sugerimos iniciar as atividades com a proposição da Questão 21 – Nível 1, do Banco de Questões da OBMEP, conforme está indicado nas páginas 34 a 39 do texto OBMEP na Escola – Resolução de Problemas na sala de aula, [Clique aqui](#). Esperamos que a leitura do Capítulo 2 - Contagem e Combinatória - do texto sugerido possa ajudá-lo a estabelecer abordagens pedagógicas com seus estudantes.

Também, o uso adequado de representação por árvores de possibilidades se constitui em ferramenta poderosa para se resolver problemas e induzir a generalização para casos cuja enumeração demanda muito tempo e favorece o aparecimento de erros.

Algumas estratégias importantes na resolução de problemas de contagem são:

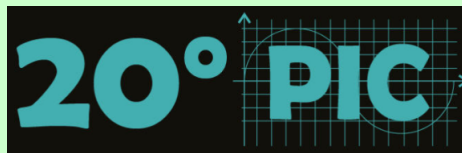
1. Colocar-se, sempre, no papel da pessoa que deve realizar a ação proposta pelo problema;
2. Sempre que possível, quebrar o problema de modo que as decisões a serem tomadas sejam mais simples;
3. Nunca adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas, costumam se transformar em imensas dificuldades. Uma atitude que favorece a resolução é começar sempre pela situação mais restritiva.

Para finalizar lembramos dois pontos importantes: os problemas propostos não estão ordenados segundo alguma ordem específica de dificuldade ou conteúdo e cabe a você definir a ordem que mais convenha para sua turma. E, por último, não se esqueça de dar voz para seus estudantes, permitindo a discussão de todas as estratégias pensadas, tanto as corretas quanto as incorretas, estimulando-os a ultrapassarem as dificuldades que porventura ocorram e, principalmente, entender como os princípios de contagem (multiplicativo e aditivo) são representados em um diagrama de árvore.

PIC 2026

G2 – CICLO 2 – ENCONTRO 1

Exercícios – Enunciados



Exercício 1. João possui três caixas e dentro delas bolas com números de 1 a 9, distribuídas conforme a figura abaixo. Ele retira uma bola de cada caixa e forma um número com três algarismos da seguinte forma, da 1ª caixa vem o algarismo das centenas, da 2ª o algarismo das dezenas e da terceira o algarismo das unidades. Depois João devolve as bolas para as respectivas caixas e repete o processo.

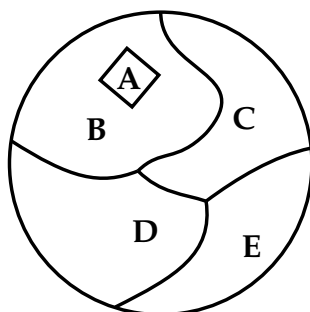
1	5	2	4	2	9
3		8	7	5	6

- Quantos números distintos João consegue formar?
- Quantos números pares distintos João consegue formar?
- Quantos números ele consegue formar usando apenas os algarismos ímpares?
- Quantos números João consegue formar sem algarismos repetidos?

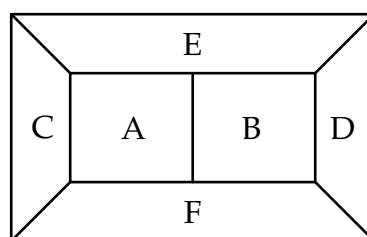
Exercício 2. Um grupo de turistas é formado por 3 ingleses, 5 portugueses e 2 americanos. De quantas maneiras distintas o grupo pode formar uma fila de embarque para que todos os turistas de mesma origem fiquem juntos e os ingleses se posicionem nos primeiros lugares?

Exercício 3. A família de Felipe tem 5 pessoas, de quantas maneiras distintas eles podem se colocar em torno de uma mesa redonda de seis lugares?

Exercício 4. Paulo tem tintas de quatro cores diferentes. Ele quer pintar cada região da figura abaixo de uma cor de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. De quantas maneiras diferentes ele pode fazer isso?



Exercício 5. Cada uma das seis regiões da figura abaixo deve ser pintada usando uma única cor, escolhida entre verde, amarelo, azul e branco, de modo que regiões adjacentes não fiquem com a mesma cor.



- De quantas maneiras diferentes podemos colorir a figura de tal forma que as regiões E e F tenham cores diferentes?
- De quantas maneiras diferentes podemos colorir a figura de tal forma que as regiões E e F tenham a mesma cor?
- Qual é o número total de maneiras diferentes que podemos colorir a figura?

Exercício 6. Um engradado, como o da figura, tem capacidade para 25 garrafas. De quantas maneiras diferentes podemos colocar 5 garrafas no engradado de modo que quaisquer duas delas não fiquem numa mesma fila horizontal, nem numa mesma fila vertical?

	1	2	3	4	5
5					
4					
3					
2					
1					

Exercício 7. Considere o conjunto dos dígitos $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ e forme com eles números de nove algarismos distintos. Quantos desses números serão pares?

Exercício 8. Escrevendo todos os números naturais de 1 a 2026, quantas vezes o algarismo zero é escrito? Em quantos números aparece o algarismo zero?

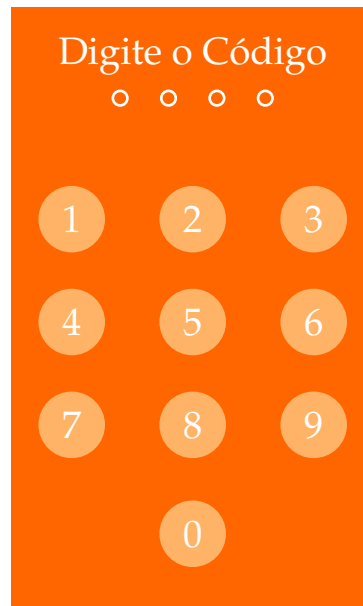
Exercício 9. Uma folha de papel contém vinte pontos. São desenhados segmentos de reta ligando cada dois pontos na folha. Qual o menor e o maior número de retas distintas que podem ser traçadas a partir desses segmentos de reta traçados?

Exercício 10. Laurinha brinca de desenhar triângulos unindo três vértices de um polígono convexo com mais de 3 lados. Por exemplo se o polígono for um quadrilátero de vértices A, B, C e D , ela pode desenhar os seguintes triângulos: ABC ; ABD ; ACD e BCD .

- Quantos triângulos ela pode desenhar se o polígono possuir 5 lados?
- Quantos triângulos ela pode desenhar se o polígono possuir n lados, com $n \geq 4$?

Exercício 11. Uma caixa contém 48 bolas numeradas de 1 a 48. São retiradas, em sequência e sem reposição, duas bolas. De quantos modos isso pode ser feito de maneira que a primeira bola seja uma bola de número par e a segunda bola não seja a bola de número 16?

Exercício 12. Roseli esqueceu a sua senha para desbloquear um antigo celular que utiliza um teclado numérico, como o que aparece na figura abaixo.



Ela lembra que:

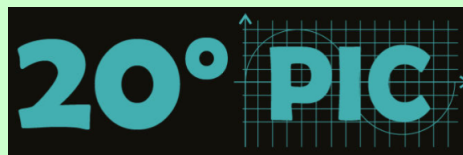
- I) O código utilizado possui 4 dígitos.
- II) O primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha.
- III) O segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Quantos códigos deverão ser experimentados por Roseli para que, com certeza, ela consiga desbloquear e acessar esse aparelho?

PIC 2026

G2 – CICLO 3 – ENCONTRO 1

Exercícios – Soluções

**Exercício 1.**

- (a) Para o algarismo das centenas, João possui 3 escolhas, para cada uma delas ele possui 4 escolhas para o algarismo das dezenas. Escolhidos os algarismos das centenas e dezenas ele tem 4 possibilidades para a escolha do algarismo das unidades, dessa forma a quantidade de números com três dígitos que ele pode formar é $3 \times 4 \times 4 = 48$.
- (b) Um número será par se o algarismo das unidades for par, como na 3ª caixa só existem dois números pares, a quantidade de números pares que ele consegue formar é $3 \times 4 \times 2 = 24$.
- (c) Se João só quer utilizar os algarismos ímpares ele possui 3 escolhas para o algarismo das centenas, uma escolha para o algarismo das dezenas e 2 escolhas para o algarismo das unidades, totalizando $3 \times 1 \times 2 = 6$ números distintos.
- (d) Vamos verificar quantas das 48 possibilidades possuem algum algarismo repetido: da 1ª caixa o único algarismo que se repete é o 5 que também aparece na 3ª caixa, assim temos um total de $1 \times 4 \times 1 = 4$ números com o algarismo 5 aparecendo como algarismo das centenas e das unidades. Na 2ª caixa o único algarismo que se repete é o 2 que também aparece na 3ª caixa, assim temos o total de $3 \times 1 \times 1 = 3$ números com o algarismo 2 aparecendo como algarismo das dezenas e das unidades. Dessa forma, temos um total de 7 números de três algarismos com algum algarismo repetido. Assim, a quantidade de números que João consegue formar, sem algarismos repetidos, é $48 - 7 = 41$ números.

Exercício 2. Vejamos inicialmente como podemos distribuir os grupos por nacionalidade. Como os ingleses devem ficar nas primeiras posições da fila, podemos colocar a seguir os portugueses ou os americanos. Ou seja, a ordem das nacionalidades pode ser escolhida de duas maneiras distintas. Uma vez escolhida a ordem que as nacionalidades aparecerem na fila, os ingleses podem ser ordenados de $3 \times 2 \times 1 = 6$ maneiras diferentes, os americanos podem ser ordenados de $2 \times 1 = 2$ maneiras diferentes e os portugueses podem ser ordenados de $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras diferentes. Portanto a fila pode ser formada de $2 \times 6 \times 2 \times 120 = 2.880$ maneiras distintas.

Exercício 3. Podemos pensar nas cinco pessoas alocadas a partir da cadeira vazia. Assim, ao todo teremos 5 escolhas para o primeiro lugar, 4 para o segundo etc. Ou seja, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ maneiras distintas.

Exercício 4. (OBMEP 2018 – N1 – Questão 17 – 1ª fase – Modificado).

O círculo é composto de cinco regiões rotuladas como na figura. Se começarmos a pintar as regiões a partir da região A, teremos quatro cores para fazê-lo. A região em volta, B, terá apenas três cores disponíveis. As duas outras regiões D e C, vizinhas à região B, são vizinhas entre si; portanto, a próxima região a ser pintada tem três cores disponíveis e a quarta, apenas duas, já que é vizinha de duas regiões. A última região E é vizinha das regiões D e C e, portanto, tem apenas duas cores disponíveis. Pelo Princípio Multiplicativo, o número total de maneiras possíveis de pintar as regiões do círculo é, portanto, $4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 144$.

Exercício 5. Um modo de contar as possibilidades de colorir a figura, respeitando as condições exigidas, é escolher em primeiro lugar as cores das regiões A e B e usar o Princípio Aditivo.

- (a) Primeiro caso: as cores das regiões E e F são diferentes. Neste caso, temos 4 cores para colorir a região A, 3 cores para a região B, 2 cores para a região E, uma cor para a região F, uma cor para a região C e uma cor para a região D. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, podemos colorir a figura de $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 24$ maneiras diferentes.

Outra solução: Observe que se E e F têm cores diferentes então para colorir as regiões A, B, E e F devemos usar as 4 cores disponíveis. Existem $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ maneiras de se fazer isto. Como já usamos todas as cores, as cores de C e D já estão definidas: C deverá ter a mesma cor de B e D deverá ter a mesma cor de A.

- (b) Segundo caso: as cores das regiões E e F são iguais. Neste caso, temos 4 cores para colorir a região A, 3 cores para a região B, 2 cores para a região E, uma cor para a região F, que é a mesma cor da região E, 2 cores para a região C e 2 cores para a região D. Pelo Princípio Multiplicativo, neste caso, podemos colorir a figura de $4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2 = 96$ maneiras diferentes.
- (c) Assim, pelo Princípio Aditivo, temos $24 + 96 = 120$ maneiras distintas de colorir a figura dada, nas condições exigidas pelo enunciado.

Exercício 6. O problema pede que coloquemos 5 garrafas em um engradado 5×5 de modo que nenhuma compartilhe linha ou coluna. Esse é o mesmo que **“contar o número de permutações de 5 elementos”**, pois:

Cada linha deve ter exatamente **“uma garrafa”**. Cada coluna deve ter exatamente **“uma garrafa”**. Ou seja, é como organizar **“5 garrafas em 5 linhas e 5 colunas diferentes”**.

O número de maneiras de fazer isso é: $5! = 120$.

Portanto, existem 120 maneiras diferentes de colocar as 5 garrafas no engradado de forma que nenhuma fique na mesma linha ou coluna que outra.

Exercício 7. (<https://clubes.obmep.org.br/blog/problema-para-ajudar-na-escola-par-impar/>).

Observe que os números pares que podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, ..., 9 são aqueles que terminam em 2, 4, 6 ou 8. Dessa forma, vamos dividir a nossa contagem em dois eventos: a escolha do último dígito e a escolha dos outros oito dígitos.

Evento 1: Escolha do último dígito

Podemos escolher o último dígito de 4 maneiras diferentes: ou 2, ou 4, ou 6, ou 8. Logo, temos 4 possibilidades distintas.

Evento 2: Escolha dos demais dígitos

Vamos dividir este evento em oito etapas independentes entre si: escolha do primeiro dígito, escolha do segundo dígito, ..., escolha do oitavo dígito; e aplicar o Princípio Fundamental da Contagem para calcular a quantidade de maneiras em que esses oito eventos ocorrem ao mesmo tempo, obtendo, então, o número de possibilidades para esse evento.

Observe que, dos nove algarismos disponíveis, restam oito, já que utilizamos um deles como último dígito. Podemos então escolher o primeiro dígito de 8 maneiras diferentes; o segundo, de 7 maneiras; o terceiro, de 6 e assim sucessivamente até o oitavo dígito.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos um total de $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$ possibilidades, ou seja, 40320 possibilidades diferentes para este evento.

Portanto, podemos formar $4 \times 40320 = 161280$ números pares com nove algarismos distintos utilizando o conjunto dos dígitos $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Exercício 8. Separando em casos:

Números com dois dígitos (de 1 a 99): todas as dezenas 10, 20, ..., 90, cada uma com um zero – 9 no total.

Números com três dígitos (de 100 a 999): há os números com um zero, como 102, e números com dois zeros, como as centenas.

- Com um zero: são todos da forma $xy0$ ou $x0y$, onde x e y são algarismos diferentes de 0, podendo ser iguais. Assim: $9 \times 9 + 9 \times 9 = 81 + 81 = 162$ os números com apenas um zero.

- Com dois zeros: temos os números da forma $x00$ com x um algarismo não nulo, usando um total de 18 dígitos 0.

Portanto, para escrever os números com três dígitos são utilizados $162 + 18 = 180$ algarismos 0.

Números com quatro dígitos: temos números em que figuram apenas um algarismo 0; somente dois algarismos 0; e aqueles com três algarismos 0, ou seja, números das formas: $1yz0$, $1y0z$, $10yz$, $100y$, $10y0$, $1y00$, onde y, z são algarismos diferentes de 0; os da forma $200a$ e $201a$, onde a é qualquer algarismo diferente de zero; além dos números 1000, 2000, 2010, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025 e 2026.

Assim, ao escrever todos os números de 1000 a 2023, temos: $3 \times 81 + 2 \times (3 \times 9) + 18 + 9 + 10 + 6 = 340$ algarismos 0.

Assim, para escrever os números de 1 a 2026 usamos $9 + 180 + 340 = 529$ algarismos 0.

Para contar quantos números de 1 a 2026 possuem o algarismo zero, vamos utilizar os cálculos anteriores.

de 1 a 99: são 9 números, 10, 20, 30, ..., 90.

de 100 a 999: são 162 números com um algarismo zero mais os números 100, 200, ..., 900, totalizando 171 números.

de 1000 a 1999: são $3 \times 81 = 243$ números com um algarismo zero, mais $3 \times 9 = 27$ números com dois algarismos zero mais 1 número com 3 algarismos zero (o número 1000), totalizando 271 números em que aparece o algarismo zero.

de 2000 a 2026: todos os números contém algum dígito igual a zero, totalizando 27 números.

Assim, a quantidade de números naturais de 1 a 2026 que contém algum dígito zero é: $9 + 171 + 271 + 27 = 478$

Exercício 9. (<https://clubes.obmep.org.br/blog/problema-pontos-e-retas/>).

O menor número de retas é 1. Isso acontece quando todos os vinte pontos estão alinhados e, portanto, pertencem à mesma reta.

O maior número ocorrerá quando todas as retas forem diferentes. Isso pode ocorrer, por exemplo, quando os vinte pontos forem colocados sobre uma circunferência. Então, três pontos nunca serão colineares, já que qualquer reta intersecta um círculo no máximo em dois pontos.

Como três pontos nunca pertencem a uma mesma reta, temos $\frac{20 \times 19}{2} = 190$ retas. Esse é exatamente o número de pares de pontos distintos escolhidos de vinte pontos, quando a ordem da escolha não importa.

Exercício 10.

- (a) Sejam A, B, C, D e E os vértices do polígono de 5 lados, podemos formar os seguintes triângulos:

$$ABC; ABD; ABE; ACD; ACE; \\ ADE; BCD; BCE; BDE; CDE$$

Totalizando 10 triângulos diferentes.

- (b) Para cada triângulo necessitamos de 3 vértices distintos. Para a escolha do primeiro vértice, temos n possibilidades. Para a escolha do segundo, temos $n - 1$ e para a escolha do terceiro, temos $n - 2$ possibilidades. Isso resulta em um total de

$$n \times (n - 1) \times (n - 2)$$

possibilidades. Como a ordem da escolha dos vértices não altera o triângulo, (os triângulos ABC, ACB, BCA, BAC, CAB e CBA são todos os mesmos, por exemplo) para cada 3 vértices escolhidos, temos 6 composições iguais, o que nos leva a dividir o resultado obtido anteriormente por 6, ou seja, há um total de

$$\frac{n(n - 1)(n - 2)}{6}$$

triângulos possíveis.

Exercício 11. Há duas possibilidades:

- A primeira bola retirada é a de número 16. Com isso temos uma opção para a primeira bola e 47 para a segunda. Logo há $1 \times 47 = 47$ maneiras para esse caso.
- A primeira bola é de número par, mas não é a de número 16. Assim temos 23 opções para a primeira bola e 46 para a segunda. Então há $23 \times 46 = 1058$ modos para esse caso.

Portanto a totalidade de maneiras de retirar uma bola de número par e depois uma bola que não seja a de número 16 é igual a $47 + 1058 = 1105$.

Exercício 12. (clubes.obmep.org.br/blog/problema-descobrimdo-a-senha-do-celular-s/). Pelas observações feitas, podemos concluir que o segundo e o terceiro dígitos não podem assumir o valor zero (pois não há linha abaixo) e o primeiro e o último dígitos não podem assumir os valores 1, 2 e 3 (pois não há linha acima). Assim, temos dois casos para analisar:

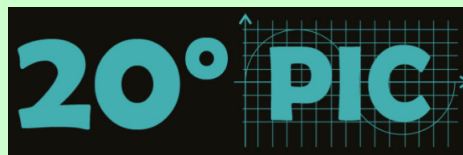
I) O primeiro e o último dígitos estão na última linha. Assim, temos apenas uma opção para o primeiro e o último (zero), três possibilidades para o segundo (7 ou 8 ou 9) e três possibilidades para o terceiro (7 ou 8 ou 9). Ou seja,

$$1 \times 3 \times 3 \times 1 = 9 \text{ possibilidades.}$$

II) O primeiro e o último dígitos estão na segunda ou terceira linha. Assim, temos seis opções para o primeiro (4, 5, 6, 7, 8 ou 9), três para o último (mesma linha do primeiro), três possibilidades para o segundo (linha imediatamente acima) e três possibilidades para o terceiro (mesma linha do segundo). Totalizando,

$$6 \times 3 \times 3 \times 3 = 162 \text{ possibilidades.}$$

Por fim, utilizando o princípio aditivo, são $162 + 9 = 171$ possibilidades para Roseli desbloquear o aparelho celular.

Roteiro de Estudos**PIC 2026****G2 – CICLO 3 – ENCONTRO 2**

Assuntos a serem abordados nesse encontro: Noções básicas de probabilidade.

I - Textos para consultas:

- Apostila 2 do PIC da OBMEP “Métodos de Contagem e Probabilidade”, Paulo Cezar Pinto Carvalho. [Clique aqui](#)
- Introdução à Probabilidade – Ferramentas básicas.
F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). [Clique aqui](#)
- Introdução à Probabilidade – O que é Probabilidade?
F. S. Benevides, A. C. Muniz Neto (revisor). [Clique aqui](#)

II - Videoaulas do Portal da Matemática (com textos integrados):

- Portal da OBMEP. Introdução à Probabilidade. J. Silva. [Clique aqui](#)

O interesse dos matemáticos no estudo sistemático de probabilidades é relativamente recente e tem suas raízes no estudo dos jogos de azar. Em muitos destes estudos, ocorre a seguinte situação: todos os possíveis resultados têm a mesma chance de ocorrer. Por exemplo, ao lançar um dado “honesto” (quer dizer, construído de forma perfeitamente cúbica e homogênea), todas as faces têm a mesma chance de sair. Como as faces são 6, esperamos que cada uma delas ocorra em aproximadamente $\frac{1}{6}$ dos lançamentos. Dizemos, então, que cada uma delas tem probabilidade $\frac{1}{6}$ de sair. Também atribuímos probabilidades a conjuntos de resultados possíveis, chamados de eventos. A probabilidade de um evento é simplesmente a soma das probabilidades dos resultados que o compõem.

Exemplo 1. Qual é a probabilidade de se obter um resultado maior que 4 ao se lançar um dado honesto?

Solução: Dizer que sai resultado maior do que 4 é equivalente a dizer que sai 5 ou 6. Como cada uma destas faces têm probabilidade $\frac{1}{6}$ de ocorrer, a probabilidade de sair um número maior do que 4 é igual a $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

De um modo geral, quando todos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de resultados relativos ao evento e o número total de resultados. Em outras palavras, é a razão entre o número de casos favoráveis à ocorrência do evento e o número total de casos.

Exemplo 2. Ao lançar um dado duas vezes, qual é a probabilidade de se obter soma 5?

Solução: Como em cada lançamento há 6 possibilidades, o número de casos possíveis é $6 \times 6 = 36$, todos com a mesma probabilidade de ocorrência. Destes aqueles em que a soma é 5 são (1, 4), (2, 3), (3, 2) e (4, 1). Logo, o número de casos favoráveis ao evento é 4, e sua probabilidade é $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Exemplo 3. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas de mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

Solução: Precisamos, primeiramente, identificar quais são os possíveis resultados. Como tudo o que observamos é a cor de cada bola retirada (as bolas de mesma cor são indistinguíveis entre si), poderíamos ser tentados a dizer que temos apenas 4 casos possíveis:

vermelho – vermelho, vermelho – preto, preto – vermelho ou preto-preto.

O problema é que estes casos não têm a mesma chance de ocorrer (é óbvio, por exemplo, que duas bolas vermelhas saem com mais frequência que duas bolas pretas, já que há mais bolas vermelhas).

Para contornar este problema, consideramos as 9 bolas presentes na urna, como distintas. Ou seja, os resultados possíveis são todos os pares de bolas distintas, cuja quantidade é $9 \times 8 = 72$. Agora, ficamos na situação em que todos os pares de bolas têm mesma probabilidade de ocorrer, uma vez que todas as bolas são iguais (a menos da cor). Para calcular o número destes pares em que ambas as bolas são vermelhas, devemos observar que a primeira bola vermelha pode ser escolhida de 5 modos, enquanto a segunda pode ser qualquer uma das 4 bolas vermelhas restantes. Logo, o número de casos favoráveis é igual a $5 \times 4 = 20$.

Assim, a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas é igual a $\frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

De modo mais geral, suponhamos que um determinado experimento tenha n resultados possíveis $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; o conjunto Ω desses possíveis resultados é chamado de espaço amostral. Suponhamos, ainda, que ao repetir o experimento um número suficientemente grande n de vezes, esperamos que o resultado ω_i ocorra em uma certa fração p_i das realizações do experimento. Dizemos, então, que a probabilidade de se observar ω_i é igual a p_i . Evidentemente, devemos ter $p_i \geq 0$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ e, além disso, $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Uma vez estabelecidos os valores para as probabilidades de cada resultado possível, podemos definir a probabilidade de qualquer evento A (ou seja, de qualquer subconjunto de Ω) como a soma das probabilidades dos resultados em A .

Mas, **como encontrar os valores das probabilidades p_i ?**

No caso geral, esses valores são obtidos de forma experimental. Mas há certos casos em que é razoável supor que todos os resultados são igualmente prováveis e que, portanto, a probabilidade de cada um deles é igual a $\frac{1}{n}$. Como foi visto na solução do primeiro exemplo, ao lançar um dado perfeitamente cúbico não há nenhuma razão para esperar que uma face apareça com mais frequência que qualquer uma das outras. Logo, a probabilidade associada a cada face é igual a $\frac{1}{6}$.

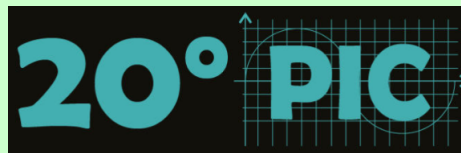
Modelos probabilísticos com esta característica são chamados de equiprováveis e estão frequentemente associados a jogos de azar. Nos modelos probabilísticos equiprováveis, a probabilidade associada a um evento A com p elementos é igual a $p \times \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$.

Muitas vezes se expressa este fato dizendo que a probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número de casos possíveis.

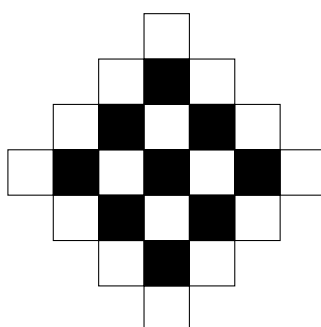
PIC 2026

G2 – CICLO 2 – ENCONTRO 2

Exercícios – Enunciados



Exercício 1. Em uma festa junina, há uma barraca com um jogo de pedrinhas. O jogador atira uma pedrinha em um tabuleiro como o da figura a seguir e ganha um prêmio se a pedra parar em uma casa preta. Qual é a probabilidade de que a pedra caia em uma casa preta?



Exercício 2. Dois dados são lançados e observa-se a soma das faces superiores.

- (a) Quais são os possíveis resultados para esta soma?
- (b) Os resultados para as somas são equiprováveis, ou seja, tem a mesma chance de ocorrer?
- (c) Encontre a probabilidade de ocorrência para cada resultado possível.

Exercício 3. Considere uma moeda honesta de duas faces. Determine:

- (a) A probabilidade de se obter duas caras em dois lançamentos.
- (b) A probabilidade de se obter três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
- (c) A probabilidade de se obter três caras e duas coroas em cinco lançamentos.

Exercício 4. Um casal decidiu que vai ter 4 filhos. O que é mais provável: que tenham dois casais ou três filhos de um sexo e um de outro?

Exercício 5. Numa sala de aula, o número de alunos do sexo feminino é 20 a mais que o número de alunos do sexo masculino. Se a probabilidade de se sortear ao acaso um aluno do sexo feminino é $\frac{7}{9}$, o número de alunos nesta sala é?

Exercício 6. Em uma mesa existem três urnas, cada uma contendo 5 bolas idênticas e numeradas de 1 a 5. Um jogo consiste em escolher um número qualquer de 1 a 5, e depois retirar, aleatoriamente, uma bola de cada urna. Se uma, duas ou três bolas tiverem o número escolhido, o jogador ganha, respectivamente, um, dois ou três pontos. João escolheu o número 4, qual é a probabilidade de João ganhar apenas um ponto?

Exercício 7. O mercado automobilístico brasileiro possui várias marcas de automóveis disponíveis aos consumidores. Para cinco dessas marcas (A, B, C, D e E), a matriz fornece a probabilidade de um proprietário de um carro de marca da linha i trocar para um carro de marca da coluna j , quando da compra de um carro novo.

	A	B	C	D	E
A	0,6	0,1	0,2	0,1	0
B	0,3	0,4	0,1	0,1	0,1
C	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
D	0,3	0,2	0,1	0,3	0,1
E	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

- Qual é a probabilidade do proprietário de um automóvel da marca C comprar um outro da mesma marca na próxima troca?
- Qual a probabilidade de um proprietário de um carro da marca B comprar um novo carro da marca C, como resultado de duas trocas?

Exercício 8. De um baralho de 28 cartas, com sete de cada naipe, Luís recebe cinco cartas; duas de ouros, uma de espadas, uma de copas e uma de paus.

Ele mantém consigo as duas cartas de ouros e troca as demais por três cartas escolhidas ao acaso dentre as 23 cartas que tinham ficado no baralho.

Qual a probabilidade de Luís, ao final, conseguir cinco cartas de ouros?

Exercício 9. A senha da dona Maria para entrar no prédio em que mora é composta pelas letras D, F e B, nessa ordem. Acontece que ela se esqueceu completamente da sequência de letras.

O porteiro eletrônico apresentou os quatro botões mostrados na figura abaixo, que ela deveria pressionar exatamente três vezes, podendo repeti-los, um para cada letra da senha.



Se ela fizer as escolhas aleatoriamente, qual a probabilidade de acertar a senha?

Exercício 10. Laura e Telma retiram um bilhete cada de uma urna em que há 100 bilhetes numerados de 1 a 100. Qual é a probabilidade de que o número retirado por Laura seja maior do que o de Telma? O resultado é o mesmo se depois de uma delas retirar um número ela o devolver à urna antes da retirada da outra?

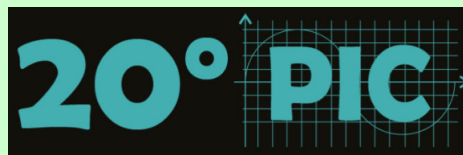
Exercício 11. Duas peças de um dominó comum (de 0 a 6) são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?

Exercício 12. Ana, Joana e Carolina apostam em um jogo de cara-e-coroa. Ana vence na primeira vez que saírem duas caras seguidas; Joana vence na primeira vez que saírem duas coroas seguidas; Carolina vence quando sair uma cara seguida de uma coroa. Qual é a probabilidade que cada uma tem de ganhar a aposta?

PIC 2026

G2 – CICLO 3 – ENCONTRO 2

Exercícios – Soluções



Exercício 1. No tabuleiro há um total de 25 casas, das quais 9 são pretas. Assim, a probabilidade de uma pedra cair em uma casa preta é $\frac{9}{25}$.

Exercício 2.

- (a) Sendo 1, 2, 3, 4, 5 e 6, os possíveis resultados para o lançamento de um dado, os possíveis resultados para a soma são: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
- (b) As probabilidades são diferentes, porque o número de casos favoráveis varia. Por exemplo, soma 2 só ocorre quando se tira 1 em ambos os dados e assim a probabilidade de ocorrência é $\frac{1}{36}$. Enquanto o resultado 4 pode ser 1 e 3, 3 e 1 ou 2 e 2, ou seja, a probabilidade de ocorrência do resultado 4 é $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
- (c) A tabela abaixo tem todos os resultados possíveis $s + t$, em que s é resultado do lançamento do primeiro dado e t , do segundo. Colocamos os valores de s na primeira linha e os de t na primeira coluna.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

A probabilidade para o resultado 2, assim como para o resultado 12 é $\frac{1}{36}$. O resultado 3 tem probabilidade $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, assim como o resultado 11. O resultado 4 tem probabilidade $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, assim como o resultado 10. O resultado 5 tem probabilidade $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$, assim como o resultado 9. O resultado 6 tem probabilidade $\frac{5}{36}$, assim como o resultado 8. O resultado 7 tem probabilidade $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Observação para o professor: é importante aproveitar problemas como este em que foram obtidas as probabilidades para todas as possíveis ocorrências, para destacar que a soma das probabilidades de ocorrência dos casos é sempre 1.

Exercício 3.

- (a) A probabilidade de se obter cara em um lançamento é $\frac{1}{2}$, desta forma, a probabilidade de se obter duas caras em dois lançamentos é: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
- (b) Denotemos por C a face cara e por K a face coroa, temos as seguintes 4 possibilidades de se obter o que é desejado: $CCCK, CCKC, CKCC, KCCC$.
A probabilidade de cada uma delas é: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

Assim, a probabilidade de se obter 3 caras e uma coroa em 4 lançamentos é:

$$4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

- (c) Temos as seguintes 10 possibilidades de se obter o que é desejado:

$CCCKK, CCKCK, CKCCK, KCCCK, KCCKC,$
 $KCKCC, KKCCC, CKKCC, CKCKC, CCKKC.$

A probabilidade de cada uma delas é:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}.$$

Assim, a probabilidade de se obter 3 caras e duas coroas em 5 lançamentos é:

$$10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}.$$

Exercício 4. Observemos, inicialmente que são $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possíveis sequências para os sexos das crianças, todas equiprováveis.

Em 6 delas há 2 casais (HMHM, MHMH, HHMM, MMHH, MHMH, HMMH). Em 8 delas há 3 filhos de um sexo e um de outro (MHHH, HMHH, HHMH, HHMM, MMMH, MMHM, MHMM, HMMM). Logo, é mais provável ter três filhos de um sexo e um de outro.

Exercício 5. Seja x o número de alunos do sexo masculino na sala de aula, como há $x + 20$ alunos do sexo feminino, o total de alunos na sala de aula é $x + x + 20 = 2x + 20$.

A probabilidade de escolher-se um aluno do sexo feminino é de $\frac{x + 20}{2x + 20} = \frac{7}{9}$.

Assim, $9(x + 20) = 7(2x + 20) \Leftrightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = 8$.

O número de alunos é $2x + 20 = 16 + 20 = 36$.

Exercício 6. Para que João ganhe apenas 1 ponto ele deve retirar a bola de número 4 em apenas uma das 3 urnas. A probabilidade de se retirar a bola de número 4 em uma urna é de $\frac{1}{5}$ e a de não retirar a bola de número 4 é de $\frac{4}{5}$. Assim a probabilidade de João retirar a bola de número 4, por exemplo apenas na primeira urna, será de:

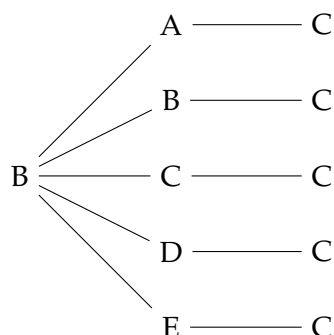
$$\frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{125}$$

Como não importa em qual das 3 urnas João irá retirar a bola de número 4, a probabilidade de ele retirar apenas uma bola de número 4 é:

$$3 \times \frac{16}{125} = \frac{48}{125} = 0,384 \quad (\text{ou } 38,4\%)$$

Exercício 7.

- (a) Olhando a diagonal da tabela percebemos que a probabilidade de um proprietário de um automóvel da marca C trocar por um novo de mesma marca é de 0,4, ou 40%.
- (b) Na primeira troca ele pode comprar um carro de qualquer uma das marcas, já na segunda teria que comprar um carro da marca C. Vamos calcular as possibilidades utilizando a seguinte figura:



- (i) Se ele comprar um carro da marca A na primeira troca, a probabilidade de comprar um da marca C na segunda troca será de $0,3 \times 0,2 = 0,06$.
- (ii) Se ele comprar um carro da marca B na primeira troca a probabilidade de comprar um da marca C na segunda troca será de $0,4 \times 0,1 = 0,04$.
- (iii) Se ele comprar um carro da marca C na primeira troca a probabilidade de comprar um da marca C na segunda troca será de $0,1 \times 0,4 = 0,04$.
- (iv) Se ele comprar um carro da marca D na primeira troca a probabilidade de comprar um da marca C na segunda troca será de $0,1 \times 0,1 = 0,01$.
- (v) Se ele comprar um carro da marca E na primeira troca a probabilidade de comprar um da marca C na segunda troca será de $0,1 \times 0,1 = 0,01$.

Assim, a probabilidade de ele comprar um novo da marca C na segunda troca será de: $0,06 + 0,04 + 0,04 + 0,01 + 0,01 = 0,16$ ou 16%.

Exercício 8. (<https://clubes.obmep.org.br/blog/problemao-cartas-no-baralho/>).

Como Luís possui cinco cartas, sendo duas de ouros e uma de cada naipe restante, sobram 23 cartas no baralho. Repare que, dentre essas 23 cartas, temos as seguintes quantidades:

$$\begin{aligned}\text{Ouros: } 7 - 2 &= 5, \\ \text{Copas: } 7 - 1 &= 6, \\ \text{Espadas: } 7 - 1 &= 6, \\ \text{Paus: } 7 - 1 &= 6.\end{aligned}$$

Note que para Luís conseguir as cinco cartas de ouros, basta que ele retire três cartas de ouros das cinco que ainda estão no baralho. Vejamos como:

Para tirar uma carta de ouros na primeira retirada, Luís dispõe de 5 cartas de ouros de um total de 23 cartas. Assim, a probabilidade que ele retire uma carta de ouros é $\frac{5}{23}$.

Para a segunda retirada, existem 4 cartas de ouros, percebe-se que uma já foi retirada antes, e, portanto, 22 cartas no total. Logo, a probabilidade de que Luís retire uma segunda carta de ouros é $\frac{4}{22}$.

Para a última retirada, Luís terá 3 cartas de ouros, de um total de 21 cartas. Com isso, a probabilidade de se retirar mais uma carta de ouros é $\frac{3}{21}$.

Portanto, a probabilidade de que Luís consiga as cinco cartas de ouros é dada por:

$$P = \frac{5}{23} \times \frac{4}{22} \times \frac{3}{21} = \frac{10}{1771}, \text{ ou seja, aproximadamente } 0,56\%.$$

Exercício 9. Analisando a quantidade de possibilidades para ela acertar cada letra, temos:

3 possibilidades de acerto para a primeira letra, ou seja, os botões



1 possibilidade de acerto para a segunda letra, ou seja, o botão:



2 possibilidades de acerto para a terceira letra, ou seja, os botões:



Desta forma, a probabilidade pedida é dada por:

$$P = \frac{3 \times 1 \times 2}{4 \times 4 \times 4} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32} = 0,09375 \approx 9,38\%.$$

Exercício 10. Em ambos os casos, Laura e Telma têm a mesma probabilidade de tirar um número maior que o da outra. Se não há devolução, não pode haver empate, e a probabilidade de que Laura tenha o maior número é de $\frac{1}{2}$ ou 50%.

Se há devolução, há possibilidade de empate, e a probabilidade de que isso ocorra é igual a 100 casos de empate dividido por 100×100 casos possíveis, ou seja,

$$\frac{100}{100 \times 100} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Logo, neste caso, a probabilidade de que Laura tenha um número maior do que o de Telma é

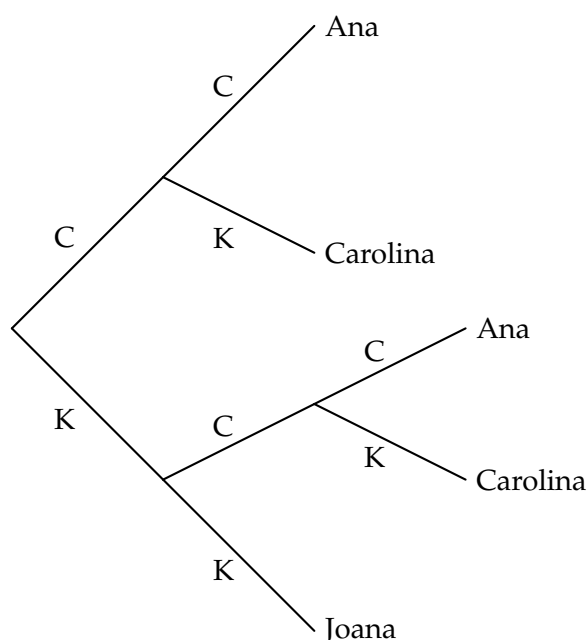
$$\frac{1 - 0,01}{2} = \frac{0,99}{2} = 0,495 = 49,5\%.$$

Exercício 11. Notemos, primeiramente que em um jogo de dominó comum, há dois tipos de peças: as formadas por números iguais (que são 7: de 0 – 0 até 6 – 6) e as formadas por um par de números distintos. Destas, há $\frac{7 \times 6}{2} = 21$ peças. Logo, o total de peças é 28. Assim, podemos selecionar duas peças, uma de cada vez, de 28×27 modos. Agora, podem ocorrer dois casos para a primeira peça:

- Ser uma das peças formadas por números iguais (7 no total). Neste caso, há 6 formas de escolher a segunda de modo a conter o mesmo número (há, no total, 7 peças em que esse número aparece).
- Ser uma das 21 peças que têm dois números distintos. Neste caso, a segunda peça pode ser escolhida de 12 modos (6 modos para cada um dos números da peça).

Logo, a probabilidade é $\frac{(7 \times 6) + (21 \times 12)}{28 \times 27} = \frac{7}{18}$.

Exercício 12. Iniciando com a árvore de possibilidades para o jogo, podemos observar que o jogo termina após 2 ou 3 jogadas:



Ana só vence em dois casos: CC, com probabilidade $\frac{1}{4}$, e KCC, com probabilidade $\frac{1}{8}$. Sendo assim, a probabilidade de Ana vencer é $\frac{3}{8}$.

Carolina vence se sai CK (probabilidade $\frac{1}{4}$) ou KCK (probabilidade $\frac{1}{8}$).

Assim, também tem probabilidade de vencer em 3 das 8 possibilidades, ou seja, também tem probabilidade $\frac{3}{8}$ de vencer.

Agora, Joana só é vencedora se sair KK, que tem probabilidade $\frac{1}{4}$ de sair.