

Álgebra Avançada

Marcos A. Sobral Filho

Monitoria

Dúvidas

1. Dê um exemplo de um subgrupo normal de S_3 .

Solução 1. Primeiro vamos listar todos os subgrupos de S_3 . Sabemos que

$$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

O único subgrupo de ordem 1 é $H_0 = \{(1)\}$. Como cada transposição tem ordem 2, temos os subgrupos cíclicos $H_1 = \{(1), (12)\}$, $H_2 = \{(1), (13)\}$ e $H_3 = \{(1), (23)\}$. Pela Proposição 12 das notas da aula 1, sabemos que os subgrupos são aqueles subconjuntos fechados para a operação e para a inversão. Além disso, a ordem de um subgrupo precisa dividir a ordem de S_3 , que é 6. A partir disso, descobrimos que o único subgrupo que resta é $H_4 = \{(1), (123), (132)\}$.

Testando a normalidade de cada um deles através do cálculo das classes laterais, vemos que os únicos que têm classes laterais à esquerda e à direita coincidindo são H_0 e H_4 .

Para se pensar: É verdade que todo grupo possui um subgrupo normal não trivial? Poderia dar um exemplo de subgrupo de S_4 que não tem subgrupo normal não trivial?

Solução 2. Outra forma de mostrar que H_4 é um subgrupo normal de S_3 é achar um homomorfismo de grupos $\phi : S_3 \rightarrow G$ cujo núcleo é H_4 .

Tome por exemplo, $\phi : S_3 \rightarrow S_3$ definido por $\phi(x) = (1)$ se $x \in H_4$ e $\phi((12)) = (23)$, $\phi((13)) = (12)$, $\phi((23)) = (13)$. Verifique que é de fato um homomorfismo de grupos. Assim, $H_4 = \ker \phi$, donde é subgrupo normal de S_3 .