

Álgebra Comutativa

Lista dimensão de Krull

2023/1 - Turma U
Professor: Charles Almeida

QUESTÃO 1 Seja $B|A$ uma extensão inteira de domínios, $p \in \text{Spec}(A)$, e $S = A \setminus p$ e denote por $B_p = S^{-1}B$. que B possua apenas um primo q tal que $q \cap A = p$. Prove que

- qB_p é único maximal de B_p ;
- $B_q = B_p$ e que $B_q|A_q$ é inteira.

QUESTÃO 2 Sejam $A = K[T_1, T_2, T_3]$ e $B = K[X, Y]$, onde K é corpo. Considere o K -homomorfismo de anéis dado por $\varphi : A \rightarrow B$ com $\varphi(T_1) = X^2$, $\varphi(T_2) = XY$ e $\varphi(T_3) = Y^2$. Mostre que se $I = \ker \varphi$, então $I = (T_2^2 - T_1T_3)$. (Sugestão: Prove que $\text{im } \varphi = K[X^2, XY, Y^2]$ e calcule sua dimensão).

QUESTÃO 3 Calcule a dimensão de Krull dos seguintes anéis.

- $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}]$
- $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}]$
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1)$

QUESTÃO 4: Quais dos seguintes anéis são artinianos?

- $\mathbb{Z}[x]/(25, x^2 - 2)$
- $\mathbb{Q}[x, y]/(f)$, onde $f(x, y) \notin \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(x_1^{k_1} + \dots + x_n^{k_n})$, onde os k_i 's são inteiros.
- $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_n)$, onde os f_i 's possuem apenas um número finito de zeros em comum.

QUESTÃO 5: Seja $B|A$ uma extensão finita com $\dim_{\text{Krull}} A = n$. Prove que:

- $\dim_{\text{Krull}} A = B$.
- Se A é domínio, $n = 1$ e I é ideal de A (não trivial), então I possui uma única decomposição primária.
- Se J é ideal não trivial de B , e possui um elemento que não é divisor de zero, então J possui única decomposição primária.