

Sejam κ um corpo qualquer e V um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Um **operador linear** é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$.

Se $\dim_{\kappa} V = n$ e $\mathcal{B}$ é uma base de V , então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ pertence à $\mathbb{M}_n(\kappa)$, muitas informações sobre T podem ser obtidas através de cálculos sobre a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$, para obter tal feito é conveniente que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja a mais simples possível. Além das matrizes múltiplas da identidade λId_n , com $\lambda \in \kappa$, talvez as matrizes mais simples sejam as matrizes diagonais

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

De fato, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, então $[T]_{\mathcal{B}} = D$ se, e somente se, $Tv_i = c_i v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso, temos por exemplo,

$$\text{Ker } T = \langle v_i \mid Tv_i = c_i v_i, c_i = 0 \rangle \text{ e}$$

$$\text{Im } T = \langle v_i \mid Tv_i = c_i v_i, c_i \neq 0 \rangle,$$

ou seja, informações importantes sobre T podem ser obtidas a partir de D . Sendo assim, caso $[T]_{\mathcal{B}}$ não seja diagonal, seria interessante determinar uma base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$ seja diagonal, onde P é uma matriz invertível. O problema é que nem toda matriz é semelhante à uma matriz diagonal, como é o caso de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Veremos no decorrer dessas notas que se κ é algébricamente fechado, podemos determinar J uma matriz similar à $[T]_{\mathcal{B}}$ que embora não seja diagonal, possui uma forma que facilita a obtenção de informações relevantes de T . Tal matriz é a conhecida **forma canônica de Jordan**.

Veremos à seguir alguns resultados e definições necessários para obter tal forma.

Definição 1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear.

1. Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \kappa$, tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$.
2. Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é dito **autovetor de T associado a λ** . Denotaremos por $\text{Aut}_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ , dito **autoespaço de λ** .
3. Suponha que $\dim_{\kappa} \kappa = n < \infty$. Dizemos que T é **diagonalizável** se existe uma base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.

Observação 2. Dizer que T é diagonalizável é equivalente a dizer que existe uma base $\mathcal{B}$ formada por todos os autovetores de T .

Exemplo 1. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear não injetivo, então 0 é um autovalor de T . De fato, como T é não injetor, existe um vetor não nulo v em seu núcleo. Daí $T(v) = 0 = 0v$.

Conforme o exemplo à seguir mostra, alguns operadores lineares não possuem autovalores.

Exemplo 2. O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$ não possui autovalores. De fato, se existe λ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, então

$$\begin{cases} -y &= \lambda x \\ x &= \lambda y, \end{cases}$$

cujas únicas soluções são o vetor nulo.

A seguir veremos como determinar os autovalores de um operador linear.

Proposição 3. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear onde V é um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Então $\lambda \in \kappa$ é um autovalor de T se, e somente se, $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq 0$.

Demonstração. Segue da definição de autovalor. □

Assim, nas condições da proposição anterior, sejam $\mathcal{B}$ uma base qualquer de V e $[\lambda I - T]_{\mathcal{B}}$ a matriz do operador linear $\lambda I - T$ nesta base. Segue que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\lambda I - T) \neq 0 &\Leftrightarrow [\lambda I - T]_{\mathcal{B}} \text{ não é invertível} \\ &\Leftrightarrow \det([\lambda I - T]_{\mathcal{B}}) = 0. \end{aligned}$$

Se $\dim_{\kappa} V = n$, observe que $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ é um polinômio mônico de grau n . Sendo assim, λ é autovalor de T se, e somente se, λ é raiz de $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$. E mais, se $\mathcal{C}$ é outra base de V , sabemos que existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\kappa)$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P$ (i.e. $[T]_{\mathcal{C}}$ e $[T]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes) e sendo Id_n a matriz identidade em $\mathbb{M}_n(\kappa)$, segue que

$$\begin{aligned} \det([xI - T]_{\mathcal{B}}) &= \det(xId_n - [T]_{\mathcal{B}}) \\ &= \det(xP^{-1}Id_nP - P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P) \\ &= \det(P^{-1}(xId_n - [T]_{\mathcal{C}})P) \\ &= \det(P^{-1})\det(xId_n - [T]_{\mathcal{C}})\det(P) \\ &= \det(xId_n - [T]_{\mathcal{C}}) \\ &= \det([xI - T]_{\mathcal{C}}), \end{aligned}$$

ou seja, $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ não depende da base escolhida, o que justifica a seguinte definição.

Definição 4. Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $\mathcal{B}$ uma base de V . Chamamos o polinômio $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ de **polinômio característico** de T e o denotamos por $p_T(x)$.

Nas condições da definição anterior, se κ é algébricamente fechado, então o polinômio característico de um operador T será da forma

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_l)^{r_l},$$

com $\lambda_i \in \kappa$ e $r_i \geq 1$. E portanto, existirão autovalores para T .

O resultado a seguir caracteriza quando um operador é diagonalizável.

Teorema 5. Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_l, l \geq 1$ são todos os autovalores de T , então

T é diagonalizável se, e somente se, $\dim_{\kappa} V = \sum_{i=1}^t \dim_{\kappa} \text{Aut}_T(\lambda_i)$.

Exemplo 3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{C}$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Fazendo os cálculos, temos $p_T(x) = (x+1)^2(x+2)$,

$$\text{Aut}_T(-1) = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 2) \rangle \text{ e } \text{Aut}_T(-2) = \langle (1, -1, 1) \rangle.$$

Logo, pelo Teorema 5, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e T é diagonalizável.

Dado um autovalor λ de um operador T , veremos à seguir a relação entre $\dim_{\kappa} \text{Aut}_T(\lambda)$ com a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico $p_T(x)$.

Definição 6. Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$, com $q(\lambda) \neq 0$, o polinômio característico de T e λ um autovalor de T .

1. O número m é chamado de **multiplicidade algébrica de λ** e denotado por $ma(\lambda)$.
2. Chamamos de **multiplicidade geométrica de λ** à dimensão do subespaço $\text{Aut}_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.

Proposição 7. Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e λ um autovalor de T . Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_l)^{n_l}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ distintos. Segue da definição do polinômio característico que $\dim_{\kappa} V = n_1 + \cdots + n_l$,

assim pela proposição acima temos que $\dim_{\kappa} V = \sum_{i=1}^l \dim_{\kappa} \text{Aut}_T(\lambda_i)$ se, e somente se, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$, para cada i , o que nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 8. *Sejam V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ os seus distintos autovalores. As seguintes condições são equivalentes.*

1. T é diagonalizável.
2. $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_l)^{n_l}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, para cada $i = 1, \dots, l$.
3. $\dim_{\kappa} V = \sum_{i=1}^l \dim_{\kappa} \text{Aut}_T(\lambda_i)$

Agora, como prometido, veremos o que ocorre quando $[T]_{\mathcal{B}}$ não é diagonalizável.

Definição 9. Sejam V um κ -espaço vetorial, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e seja $W \subset V$ um subespaço de V . Se $T(w) \in W$, $\forall w \in W$, dizemos que W é um subespaço **T-invariante** de V .

Proposição 10. *[Exemplos] Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um κ -espaço vetorial e sejam $W \subset V$ um subespaço de V e $\lambda \in \kappa$. Então*

1. *Os subespaços vetoriais de V , núcleo $\text{Ker}(T)$ e imagem $\text{Im}(T)$ são T -invariantes.*
2. *Se W é um subespaço T -invariante, então a restrição de T a W é um operador linear $T|_W : W \rightarrow W$.*
3. *W é $(\lambda \text{Id} - T)$ -invariante se, e só se, W for T -invariante.*

O estudo de subespaços invariantes de um espaço vetorial V por um operador linear $T : V \rightarrow V$ é útil, pois nos permite encontrar uma base para o espaço vetorial na qual a matriz de T pode ser escrita em blocos, como podemos ver a partir do seguinte teorema.

Teorema 11. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um κ -espaço vetorial de n -dimensional, tais que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, onde cada W_i é um subespaço T -invariante. Seja também $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ uma base de V , com $\mathcal{B}_i$ base de W_i . Então $[T]_{\mathcal{B}}$ se escreve da seguinte maneira:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}$$

onde $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$ é a matriz da restrição de $T_i := T|_{W_i}$.

Demonstração. Considere $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$, ordenando a base como $\mathcal{B} = \{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rn_r}\}$. Seja $v_{ij} \in \mathcal{B}$, temos que

$$T(v_{ij}) = a_{11}v_{11} + \cdots + a_{1n_1}v_{1n_1} + \cdots + a_{r1}v_{r1} + \cdots + a_{rn_r}v_{rn_r} \quad \text{com } a_{ts} \in \kappa.$$

Como $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ e W_i é T -invariante para $i = 1, \dots, r$, segue que $a_{ts} = 0$, se $t \neq i$. Logo,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix}.$$

□

Deste último teorema temos que o operador linear T é soma direta dos operadores $T_1, \dots, T_r$, onde cada operador T_i está definido em um espaço vetorial de dimensão menor que $\dim_{\kappa} V$. Nosso próximo objetivo será encontrar uma decomposição conveniente para T . Para isso, o nosso primeiro passo será estudar o polinômio característico de um operador linear.

Corolário 12. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um κ -espaço*

vetorial. Se $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$, então o polinômio característico de T é dado por $p_T(x) = p_{T_1}(x) \cdots p_{T_r}(x)$.

Teorema 13 (Cayley-Hamilton). *Seja V um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$.*

Além do polinômio característico, existe outro polinômio importante associado a um operador linear T .

Definição 14. Chamamos de **polinômio minimal** de um operador linear $T : V \rightarrow V$, o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T) = 0$ $\forall v \in V$.

Veremos à seguir algumas relações entre esses polinômios que decorrem do Teorema de Cayley-Hamilton.

Corolário 15. *O polinômio minimal $m_T(x)$ de T é um divisor do polinômio característico $p_T(x)$ de T .*

Demonstração. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos que $p_T(T) = 0$, assim, segue pela definição do polinômio minimal que $\deg m_T \leq \deg p_T$. Aplicando o algoritmo da divisão, temos que

$$p_T(x) = q(x)m_T(x) + r(x), \text{ com } r(x) = 0 \text{ ou } \deg r < \deg m_T. \quad (1)$$

Aplicando (1) em T , temos $r(T) = 0$. Assim, pela minimalidade de m_T temos $r = 0$ e segue o resultado. $\square$

Corolário 16. *Os polinômios característico e minimal de T têm as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, segue que todas as raízes de m_T são raízes de p_T . Desta forma, basta mostrarmos que as raízes de p_T são raízes de m_T .

Seja λ raiz de p_T , ou seja, λ é autovalor de T e assim sendo existe $v \in V$,

$v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$. Note que, para cada $i \geq 1$, temos $T^i(v) = \lambda^i v$ e se escrevermos $m_T(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= m_T(T)(v) \\ &= \left(\sum_{i=0}^m a_i T^i \right) (v) \\ &= \left(\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i \right) (v) \end{aligned}$$

e como $v \neq 0$, segue que $m_T(\lambda) = \sum_{i=0}^m a_i \lambda^i = 0$ e temos o resultado. $\square$

A seguir definiremos operadores nilpotentes, pois eles serão a pedra fundamental para construção de formas de Jordan.

Definição 17. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é chamado de **nilpotente**, se existir um inteiro positivo m , tal que $T^m = 0$. O menor índice com esta propriedade é dito **índice de nilpotência**.

Exemplo 4. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e β uma base de V tal que a matriz de T na base β é escrita por,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Tal matriz é nilpotente, com índice (de nilpotência) k .

Teorema 18. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Então T pode ser decomposto, de maneira única, em uma soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível.*

Demonstração. Temos que

$$\text{Ker } T \subset \text{Ker } T^2 \subset \dots$$

Como V é de dimensão finita, estas inclusões não podem ser próprias, logo existe um menor inteiro k tal que $\text{Ker } T^k = \text{Ker } T^{k+1}$. Sendo assim, temos

$$\text{Ker } T^k = \text{Ker } T^{k+j}, \text{ com } j = 1, 2, \dots$$

Considerando

$$H = \text{Ker } T^k \text{ e } K = \text{Im } T^k$$

temos que $H \cap K = \{0\}$, pois se $v \in H \cap K$ então $T^k(v) = 0$ e existe $w \in V$ tal que $T^k(w) = v$, portanto $v = T^k(T^k(w)) = T^{2k}(w) = T^k(w) = 0$. pelo Teorema do Núcleo e Imagem, temos $\dim(\text{Ker } T^k) + \dim(\text{Im } T^k) = \dim V$, logo $V = H \oplus K$.

Assim, considere $T_1 = T|_H$ e $T_2 = T|_K$, então $T = T_1 \oplus T_2$. Observe que:
 T_1 é nilpotente: Se $v \in H$, então $T^k(v) = 0$, logo $T_1^k(v) = T^k(v) = 0$.
 T_2 é invertível: Se $w \in K$, então existe $w' \in V$ tal que $T^k(w') = w$. Se $T_2(w) = 0$, temos

$$0 = T_2(w) = T_2(T^k(w')) = T^{k+1}(w') = T^k(w') = w.$$

Portanto, T_2 é invertível. □

Proposição 19. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice $r \geq 1$, onde V é um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Se $v_0 \in V$ é tal que $T^{r-1}(v_0) \neq 0$, então:*

1. $\lambda = 0$ é o único autovalor de T .
2. O conjunto $\{v_0, T(v_0), \dots, T^{r-1}(v_0)\}$ é linearmente independente.

Demonstração. 1. Se $T(v) = \lambda v$, com $v \neq 0$, então $0 = T^m(v) = \lambda^m v$, logo $\lambda = 0$.

2. Sejam $\alpha_i \in \kappa$ tais que $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 T(v_0) + \dots + \alpha_{r-1} T^{r-1}(v_0) = 0$. Suponha que exista um escalar não nulo, sem perda de generalidade, seja α_s o

primeiro escalar não nulo. Assim, $\alpha_s T^s(v_0) + \dots + \alpha_{r-1} T^{r-1}(v_0) = 0$.

Logo

$$\begin{aligned} T^s(v_0) &= -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} T^{s+1}(v_0) - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} T^{r-1}(v_0) \\ &= T^{s+1} \underbrace{\left(-\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} (v_0) - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} T^{r-s-2}(v_0) \right)}_v. \end{aligned}$$

Portanto, $T^s(v_0) = T^{s+1}(v)$, para o v descrito acima. Segue que

$$T^{r-1}(v_0) = T^{r-1-s}(T^s(v_0)) = T^{r-1-s}(T^{s+1}(v)) = T^r(v) = 0,$$

uma contradição, pois $T^{r-1}(v_0) \neq 0$. Logo não existe tão escalar não nulo e os vetores são linearmente independentes.

□

Faremos à seguir uma série de observações para motivar nosso resultado principal.

Observação 20. 1. Suponha que $T : V \rightarrow V$ é um operador linear nilpotente de índice m , pela Proposição 19, sabemos que $\mathcal{B} = \{v, T(v), \dots, T^{m-1}(v)\}$ é linearmente independente, para algum $v \in V$. Se $\dim_{\kappa} V = m$ o conjunto $\mathcal{B}$ formará uma base de V e a matriz de T com relação a esta base será do tipo

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

2. Suponha agora que $p_T(x) = (x - \lambda)^n$, daí, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, teremos $p_T(T) = (T - \lambda Id)^n = 0$ e, portanto o operador linear $(T - \lambda Id)$ será nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n

então, pela observação acima, existirá uma base $\mathcal{B}$ de V , tal que a matriz de $(T - \lambda Id)$ com relação a esta base será da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} = [T - \lambda Id]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} - \lambda [Id]_{\mathcal{B}}.$$

Logo,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

As observações acima, nos servem de justificativa para a próxima definição, já que as matrizes mostradas acima servirão como blocos de matrizes de operadores mais gerais.

Definição 21. Chamamos de **bloco de Jordan** $r \times r$ em λ , a matriz $J_r(\lambda) \in \mathbb{M}_r(\kappa)$ que tem λ em toda diagonal principal e 1 em toda diagonal abaixo da principal, ou seja, é a matriz do tipo

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

Definição 22. Uma matriz $J \in \mathbb{M}_n(\kappa)$ é dita **matrix de Jordan** se J é formada por blocos de Jordan $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)$, colocados sob forma diagonal da seguinte forma:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

J também é denotada por $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_s}(\lambda_s)$.

O seguinte Lemma será útil no que se segue.

Lema 23. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice $m \geq 1$, onde V é um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então:*

1. Existe um subespaço T -invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde $U = \langle v, T(v), \dots, T^{m-1}(v) \rangle$.
2. A restrição $T|_W : W \rightarrow W$ é um operador nilpotente, com índice de nilpotência $m' \leq m$.

Teorema 24. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde V é um κ -espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos $t, m_1, m_2, \dots, m_t$ e vetores $v_1, \dots, v_t \in V$ tais que*

1. $m = m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_t$.
2. O conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, T(v_1), \dots, T^{m_1-1}(v_1), \dots, v_t, T(v_t), \dots, T^{m_t-1}(v_t)\}$ é uma base de V .
3. $T^{m_i}(v_i) = 0$, para cada $i = 1, \dots, t$.

Demonstração. Como $T^{m-1} \neq 0$, existe $v_1 \in V$ tal que $T^{m-1}(v_1) \neq 0$, pelo Lema 19, $\beta_1 = \{v_1, T(v_1), \dots, T^{m-1}(v_1)\}$ é LI. Seja $W_1 = \langle \beta_1 \rangle$, como W_1 é T -invariante, segue pelo Lema 23, segue que existe $W'_2 \subset V$ T -invariante, tal que $V = W_1 \oplus W'_2$. Faça $m_1 = m$, e $T_2 = T|_{W'_2}$. É claro que T_2 é nilpotente com índice de nilpotência $m_2 \leq m_1$. Repetindo o argumento, anterior, temos que existem $v_2 \in W'_2$, $v_2 \neq 0$ tal que $\beta_2 = \{v_2, T(v_2), \dots, T^{m_2-1}(v_2)\}$ é LI, e $W'_3 \subset W'_2$ tal que $W'_2 = W_2 \oplus W'_3$ com $W_2 = \langle \beta_2 \rangle$. Repetindo este procedimento, como $\dim_{\kappa} V < \infty$, chega-se aos valores $t, m_1, \dots, m_t$. $\square$

Para um operador linear nilpotente $T : V \rightarrow V$, sejam $t, m_1, \dots, m_t$ e $\mathcal{B}$ como no Teorema 24. Então a matriz de T na base $\mathcal{B}$ é formada por blocos de ordem $m_i \times m_i$ associados ao autovalor 0, do tipo

$$J_{m_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_i},$$

ou seja, $[T]_{\mathcal{B}}$ será da forma

$$\begin{pmatrix} J_{m_1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_t}(0) \end{pmatrix}.$$

Agora nos utilizaremos dos resultados já enunciados e demonstrados, para construir o principal objetivo destas notas, a chamada **forma (canônica) de Jordan**.

Teorema 25. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um κ -espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$, com $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então, existem subespaços $U_i \subset V$, tais que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde*

1. $\dim_{\kappa} U_i = m_i$;
2. o subespaço U_i é T -invariante;
3. a restrição $(\lambda_i I - T)|_{U_i}$ é nilpotente.

Demonstração. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ sempre que $i \neq j$. Para cada $i = 1, \dots, r$, considere $T_i = \lambda_i I - T$, pelo Teorema 18 existem $U_i, W'_i \subset V$ T_i -invariantes, tais que T_i é nilpotente em U_i e invertível em W'_i . Segue do

10iii) que U_i e W'_i são T invariantes. Considere $T|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$ e $T|_{W'_i} : W'_i \rightarrow W'_i$. Pelo Teorema 11, segue que $p_T(x) = p_{T|_{U_i}}(x) \cdot p_{T|_{W'_i}}(x)$. Temos então:

1. λ_i é o único autovalor de $T|_{U_i}$. Pois como $\lambda_i Id - T$ é nilpotente em U_i , e pela Proposição 19 seu único autovalor é o 0. Logo λ_i é único autovalor de $T|_{U_i}$.
2. λ_i não é autovalor de $T|_{W'_i}$. Pois pela Proposição 18 $\lambda_i Id - T$ é invertível em W'_i .

De 1. e 2. segue que $p_{T|_{U_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$ e pela definição de polinômio característico segue que $\dim U_i = m_i$ e que $U_i \cap \{U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_r\} = \{0\}$.

Como $\dim V = \sum_{i=1}^r \dim U_i$, segue que $V = U_1 + \cdots + U_r$, e como $U_i \cap \{U_1 \oplus \cdots \oplus U_r\} = \{0\}$, segue que a soma é direta, isto é,

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r.$$

□

Podemos agora demonstrar o resultado principal destas notas.

Teorema 26. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um κ -espaço vetorial de dimensão finita, com κ um corpo algébricamente fechado. Então, existe $\mathcal{B}$ base de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz de Jordan.*

Demonstração. Seja $T : V \rightarrow V$, com $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$ seu polinômio característico, com $\lambda_i \neq \lambda_j$. Pelo teorema anterior, existem $U_i \subset V$, tal que $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde U_i é T -invariante, e $\lambda_i I - T$ é nilpotente em U_i . Segue do Teorema 24 e das observações que precedem o Teorema 25 que existem $\mathcal{B}_i$ base de U_i , e inteiros positivos $m_{1,i}, \dots, m_{t,i}$ tais que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} J_{m_{1,i}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_{2,i}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_{t,i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Como $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, temos que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \mathcal{B}_r$ é uma base de V e $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz de Jordan. $\square$

Observação 27. Nas condições do teorema anterior, note que se $\mathcal{B}'$ é outra base de V tal que $[T]_{\mathcal{B}'}$ é uma matriz de Jordan, então $[T]_{\mathcal{B}}$ e $[T]_{\mathcal{B}'}$ são semelhantes. Ou seja, a forma de Jordan de um operador existe e é única a menos de conjugação.

Exemplo 5. A observação anterior nos permite por exemplo classificar **TO-DAS** as matrizes em $M_n(\kappa)$, com κ algébricamente fechado, a menos de conjugação. Por exemplo, se $n = 2$, e $M \in M_2(\kappa)$ então M é semelhante a umas das seguintes matrizes.

1. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Com λ_1 e λ_2 em κ .

2. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$. Com λ_1 em κ .