



MA 719 - Álgebra Linear Avançada-Verão

Prova 1

Professor: Charles Almeida

1. (3 pontos) Sejam $V = \mathbb{R}^4$, $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_2, -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4, 2x_1 - 2x_2 + 3x_4).$$

Encontre uma base de Jordan B de T e a matriz de T nessa base.

2. (3 pontos) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, e justifique sua resposta:

a) (1 ponto) Existe uma matriz quadrada real A , de ordem 2, tal que $A^3 = 0$, mas $A^2 \neq 0$.

b) (1 ponto) Seja A a matriz de ordem n em um corpo qualquer, dada por
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$
 Então A é diagonalizável.

c) (1 ponto) Sejam V um $\mathbb{F}$ -espaço vetorial, com $\mathbb{F}$ um corpo, e $T \in \text{End}_{\mathbb{F}}$. Se T é inversível, então existe um polinômio $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ tal que $T^{-1} = f(T)$.

3. (2 pontos) Seja A uma matriz de ordem n com $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ seus autovalores (pode haver repetição). Então, prove que para $k \in \mathbb{N}$ fixo, $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são autovalores de A^k .

4. (2 pontos) Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e $T, U \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V)$, tais que $TU = I$ onde I denota o operador identidade em V . Resolva os seguintes itens:

a) (1,5) pontos T é inversível e $U = T^{-1}$.

b) (0,5 pontos) Prove que a conclusão do item anterior é falsa se retiramos a hipótese de que a dimensão de V é finita.