



MA/MM 719 - Álgebra Linear Avançada - Verão

Prova 2

Professor: Charles Almeida

1. (3 pontos) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule A^{2024} .
2. (3 pontos) Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas e justifique sua resposta:
 - a) (1 ponto) Todo espaço vetorial é isomorfo ao seu dual.
 - b) (1 ponto) Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T, U \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$, autoadjuntos, tais que $T \circ U = U \circ T$. Então existe uma base ortonormal de V composta por autovetores de T que também são autovetores de U .
 - c) (1 ponto) Se W é um subespaço de um espaço vetorial V , então todo funcional linear g em W^* pode ser obtido como a restrição de um funcional linear em V^* .
3. (2 pontos) Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno e $T \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$.
 - (a) (1 ponto) Mostre que se T é autoadjunto, então $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = \langle T(u), v \rangle$ é uma forma bilinear simétrica em V .
 - (b) (1 ponto) Se f é como em (a), mostre que existe uma base ortonormal de V que também é ortogonal com respeito a f .
4. (2 pontos) Sejam $V = M_n(\mathbb{R})$ e para toda $A \in V$ considere a função traço de A denotada por $\text{Tr}(A)$.
 - (a) (1 ponto) Prove que se $f \in V^*$ tal que $f(AB) = f(BA)$ para todos A, B em V , então existe um único r tal que $f(A) = r \cdot \text{Tr}(A)$.
 - (b) (1 ponto) Mostre que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$ é uma forma bilinear simétrica no espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$ e que $|\text{tr}(AB^t)| \leq \sqrt{\text{tr}(AA^t)} \sqrt{\text{tr}(BB^t)}$ para quaisquer $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. (Aqui A^t é a transposta da matriz A .)