

GRUPOS SIMÉTRICOS, ALTERNADOS E DIEDRAIS

ERICK, ISABELA, LUIZ E PEDRO ANTÔNIO

RESULTADOS IMPORTANTES

1. GRUPOS SIMÉTRICOS

Definição 1.1 (Grupos Simétricos). Temos que o conjunto de todas as possíveis permutações de um grupo finito G , em que $|G| = n$, será o grupo simétrico S_n .

Definição 1.2 (k -ciclos). Diremos que $\sigma \in S_n$ é um k -ciclo se:

- 1- Existe uma sequência $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ tal que $\sigma^w(i_1) = i_{w+1}$ para $0 \leq w \leq k-1$ com $\sigma^k(i_1) = i_1$ tal que $i_x \neq i_y, \forall 1 \leq x < y \leq k$;
- 2- Para $j \neq i_x, \forall 1 \leq x \leq k$ vale que $\sigma(j) = j$.

Proposição 1.1. Todo elemento de S_n pode ser escrito como uma composição de ciclos disjuntos.

Proposição 1.2. Todo k -ciclo de S_n pode ser escrito como uma composição de transposições

Corolário 1.1. Toda permutação pode ser escrita como uma composição de transposições

Lema 1.1. Para uma permutação $\rho \in S_n$, dada por:

$$\rho = (i_{11} \ i_{12} \ \dots \ i_{1x_1}) \circ (i_{21} \ i_{22} \ \dots \ i_{2x_2}) \circ \dots \circ (i_{t1} \ i_{t2} \ \dots \ i_{tx_t})$$

Em que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_t$.

- 1) Se $\sigma \in S_n$, então a permutação $\sigma\rho\sigma^{-1}$ tem a seguinte decomposição em ciclos disjuntos:

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = (\sigma(i_{11}) \ \sigma(i_{12}) \ \dots \ \sigma(i_{1x_1}))(\sigma(i_{21}) \ \sigma(i_{22}) \ \dots \ \sigma(i_{2x_2})) \dots (\sigma(i_{t1}) \ \sigma(i_{t2}) \ \dots \ \sigma(i_{tx_t}))$$

Ou seja, as permutações ρ e $\sigma\rho\sigma^{-1}$ têm o mesmo tipo de decomposição.

- 2) Se $\rho, \rho' \in S_n$ são permutações com o mesmo tipo de decomposição, então existe $\sigma \in S_n$ tal que $\rho' = \sigma\rho\sigma^{-1}$.

2. GRUPOS ALTERNADOS

Definição 2.1 (Paridade de uma permutação). Uma permutação é denominada par se é decomposta em um número par de transposições.

De modo análogo, uma permutação é ímpar se é decomposta em um número ímpar de transposições.

Definição 2.2 (Grupos Alternados). O grupo alternado A_n é o grupo que contém todas as permutações pares de S_n .

Proposição 2.1. Vale que $|A_n| = \frac{n!}{2}$ para $n \geq 2$.

Proposição 2.2. Todo elemento de A_n é um produto de 3-ciclos.

Teorema 2.1. A_4 não admite elemento de ordem 6.

3. GRUPOS DIEDRAIS

Definição 3.1 (Grupos diedrais). O grupo diedral D_n é o número de simetrias de um n -ágono regular. Composto de rotações r e reflexões s em que $r^n = \text{Id}$, $s^2 = \text{Id}$ e $srs = r^{-1}$.

Proposição 3.1. Calcule a ordem de D_n e verifique que os elementos do grupo D_n serão $\{ \text{Id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1} \}$.

Proposição 3.2. D_3 é isomorfo a S_3 .

Teorema 3.1. Para $n \geq 3$, vale que D_n não é abeliano.

4. EXERCÍCIOS RECOMENDADOS

Exercício 4.1. Prove que os diferentes tipos de composição formam uma classe de equivalência em que, se dois elementos possuem o mesmo tipo de composição, então eles serão equivalentes.

Exercício 4.2. Mostre que os seguintes conjuntos são conjuntos geradores de S_n :

$$\{(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)\} \quad \text{e} \quad \{(1\ 2), (1\ 2 \dots n)\}.$$

Exercício 4.3. Seja $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}^n$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo. Fixe $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{F}^n$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e considere a função $f(x_1, \dots, x_n) = \det[[x_1]_{\mathcal{B}} \ [x_2]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_n]_{\mathcal{B}}]$, onde $[x_i]_{\mathcal{B}}$ é a matriz horizontal dos coeficientes de x_i escrita em termos da base $\mathcal{B}$.

Considere a ação de S_n em $\mathbb{F}^n$ dada por $\sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ as permutações das coordenadas de $f(x_1, \dots, x_n)$ e considere

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par;} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\det[[x_1]_{\mathcal{B}} \ [x_2]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_n]_{\mathcal{B}}] = \text{sgn}(\sigma) \det[[x_{\sigma(1)}]_{\mathcal{B}} \ [x_{\sigma(2)}]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_{\sigma(n)}]_{\mathcal{B}}].$$

Exercício 4.4. Mostre que o subgrupo derivado de S_3 é seu subgrupo alternado, ou seja, $S'_3 = A_3$.

Exercício 4.5. Verifique se cada sentença abaixo é verdadeira ou falsa, justificando as verdadeiras e dando contra-exemplo para as falsas.

- (1) As permutações $(1\ 3)(2\ 5)$ e $(1\ 2)(3\ 4\ 5)$ são conjugadas em S_5 .
- (2) O grupo simétrico S_6 tem 8 classes de conjugação.
- (3) Os subgrupos $\{1, (1\ 2), (1\ 3\ 2)\}$ e $\{1, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$ são conjugados em S_4 .
- (4) O grupo alternado A_n é gerado pelos 3-ciclos da forma $(1\ 2\ k)$, $3 \leq k \leq n$.
- (5) O grupo alternado A_4 é abeliano.
- (6) O grupo alternado A_8 tem um elemento de ordem 15.
- (7) Os únicos subgrupos normais de S_3 são $\{1\}$, A_3 e S_3 .

Exercício 4.6. Prove que o subgrupo das rotações de D_n é isomorfo a C_n , onde C_n é o grupo cíclico de tamanho n .

Exercício 4.7. Se p é um número ímpar, verifique que $\mathbb{Z}_{2p}$ e D_p são os únicos grupos de ordem $2p$ (a menos de isomorfismos)

REFERÊNCIAS

- [1] A. Garcia e Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*. IMPA (Projeto Euclides). Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.
- [2] R.B. Santos e A. C. Vieira. *PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria*. 33º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2021.
- [3] S.T. Martins e E. Tengan. *Álgebra Exemplar*. IMPA (Projeto Euclides). Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.