

Grupos Simétricos, Grupos Alternados e Grupos Diedrais

Seminário Avaliativo de grupos e corpos

Alunos: Erick Araujo Maciel,
Isabela Tristao de Oliveira,
Luiz Fernando Cremonez,
Pedro Antônio Martins Tôrres.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Maio, 2025

Resumo

Este manuscrito é um roteiro de uma aula/seminário sobre Grupos Simétricos, Grupos Alternados e Grupos Diedrais de forma a introduzir tais grupos e demonstrar resultados importantes e interessantes que os cercam.

Na Primeira seção definiremos Grupos simétricos a partir de isomorfismos entre grupos finitos e apresentaremos propriedades sobre permutações que nos permitem classificar e manipular tais elementos de S_n .

Na segunda parte será discutido sobre Grupos Alternados, em que provaremos diversos resultados, dentre eles, demonstraremos que A_4 não admite elemento de ordem 6.

No último tópico apresentaremos os conceitos dos Grupos Diedrais, propriedades interessantes e aplicações em algumas áreas da Física/Química.

Palavras-Chave: *Grupos finitos, Grupos Simétricos, Grupos Alternados, Grupos Diedrais.*

Sumário

1	Grupos Simétricos	1
1.1	Tipo de Decomposição de uma Permutação	5
2	Grupos Alternados	7
2.1	A_4 não admite elemento de ordem 6	9
3	Grupos Diedrais	10
3.1	Aplicações	11
3.1.1	Física	12
3.1.2	Química	12

1 Grupos Simétricos

Denominaremos de $\sigma : G \rightarrow G$ um automorfismo de grupos finitos como uma permutação e seja S_n o conjunto de todos os automorfismos de um grupo G .

Como todo elemento de S_n é um automorfismo, quando consideramos S_n com a operação $(\circ)$, vale que:

- Se $f \in S_n$ e $g \in S_n$, como a composição de homomorfismos bijetores é bijetor, vale que $f \circ g \in S_n$.
- É Associativo, pois $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ para todo $f, g, h \in S_n$.
- Possui a função $\text{Id}_G : G \rightarrow G$ como elemento neutro, já que $g \circ \text{Id}_G = \text{Id}_G \circ g = g$.
- Se $f \in S_n$ então existe $f^{-1} \in S_n$ pois f é automorfismo e vale que $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{Id}_G$.

Ou seja, provamos que $(S_n, \circ)$ é um grupo.

Definição 1.1 (Grupos Simétricos). *Temos que o conjunto de todas as possíveis permutações de um grupo finito G , em que $|G| = n$, será o grupo simétrico S_n .*

Exercício 1.1. *Calcule a ordem de S_n*

Dado $\sigma \in S_n$, buscaremos um modo de representar σ de maneira intuitiva e única. Para isso, nomeie os elementos de G de 1 até n , então vale que $\sigma(1) = k$, para algum $1 \leq k \leq n$. Tome a sequência $(1, \sigma(1), \sigma^2(1), \dots, \sigma^n(1))$ como somente há n elementos em $\{1, \dots, n\}$, existe um $1 \leq i \leq n$ tal que $\sigma^i(1) = 1$ e disso tiramos a seguinte definição de um ciclo.

Definição 1.2 (k -ciclos). *Diremos que $\sigma \in S_n$ é um k -ciclo se:*

- 1- *Existe uma sequência $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_k)$ tal que $\sigma^w(i_1) = i_{w+1}$ para $0 \leq w \leq k-1$ com $\sigma^k(i_1) = i_1$ tal que $i_x \neq i_y, \forall 1 \leq x < y \leq k$;*
- 2- *Para $j \neq i_x, \forall 1 \leq x \leq k$ vale que $\sigma(j) = j$.*

Se σ for o k -ciclo no exemplo acima, então vale a seguinte representação $\sigma = (i_1 \ i_2 \ i_3 \ \dots \ i_k)$ onde $i_j = 1, 2, \dots, n, \forall 1 \leq j \leq k$ e $i_x \neq i_y$ se $1 \leq x < y \leq k$.

Agora temos duas proposições e alguns corolários sobre k -ciclos:

Proposição 1.1. *Todo elemento de S_n pode ser escrito como uma composição de ciclos disjuntos.*

Demonstração. Dado $\sigma \in S_n$, considere o conjunto iniciado por cada elemento, ou seja, $\nu_1 = (1, \sigma(1), \dots, \sigma^n(1)), \dots, \nu_n = (n, \sigma(n), \dots, \sigma^n(n))$. Como visto anteriormente, para todo $k = 1, \dots, n$, vale que existe w_k tal que $\sigma^{w_k}(k) = k$ de modo que $\sigma^i(k) \neq k$ para todo $i < w_k$. Por outro lado, se $\sigma^i(k) = j$, então $k = \sigma^{w_k}(k) = \sigma^{w_k-i}(\sigma^i(k)) = \sigma^{w_k-i}(j)$, logo $\nu_k = \nu_j$ a menos de ordenação e de elementos repetidos.

Escolha $\nu_{\alpha_1}, \dots, \nu_{\alpha_x}$ uma coleção de ν tal que todos os seus elementos são disjuntos e para todo $j \in 1, \dots, n$ vale que $j \in \nu_{\alpha_1} \cup \dots \cup \nu_{\alpha_x}$. Considere o k -ciclo que possui como representação ν_{α_i} dado por μ_i , provaremos que $\sigma = \mu_1 \circ \dots \circ \mu_x$.

Dado $g \in G$, como os k -ciclos são disjuntos, existe ν_{α_i} tal que $g \in \nu_{\alpha_i}$ e $g, \sigma(g) \notin \nu_{\alpha_j}$ para todo $j \neq i$, logo $\mu_i(g) = \sigma(g)$ e $\mu_j(g) = g$, ou seja, vale que:

$$\begin{aligned} (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_x)(g) &= (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_{x-1})(\mu_x(g)) \\ &= (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_{x-1})(g) \\ &= \dots \\ &= (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_i)(g) \\ &= (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_{i-1})(\mu_i(g)) \\ &= (\mu_1 \circ \dots \circ \mu_{i-1})(\sigma(g)) \\ &= \dots \\ &= \sigma(g) \end{aligned}$$

□

Exercício 1.2. *Mostre que dois ciclos disjuntos comutam e dê contraexemplo do porquê dois ciclos não disjuntos não comutam.*

Corolário 1.1. *Toda permutação de ciclos pode ser escrita de maneira única (a menos de ordenação) como um produto de ciclos disjuntos.*

Demonstração. Pela proposição anterior, sabemos que sempre existe um produto de ciclos disjuntos que geram uma permutação σ , só nos falta provar que tal escrita é única. Suponha que existam duas escritas diferentes de σ como descritas a seguir:

$$\lambda_1 \circ \dots \circ \lambda_i = \sigma = \mu_1 \circ \dots \circ \mu_j$$

Se as escritas são distintas, então há de existir $\lambda_\alpha \neq \mu_\beta$ tal que para algum $g \in G$, vale que $g \in \lambda_\alpha$ e $g \in \mu_\beta$, mas $\lambda_\alpha = (g, \sigma(g), \dots, \sigma^w(g)) = \mu_\beta$, ou seja, para todo $g \in G$, g somente pertence a um ciclo (pois os ciclos são disjuntos) mas este é unicamente definido por σ , logo é necessário que $i = j$ e que para todo $1 \leq \alpha \leq i$, $\lambda_\alpha = \mu_\beta$ para $1 \leq \beta \leq j = i$, ou seja, a escrita é única a menos da ordenação dos ciclos.

□

Para a próxima definição, nomearemos um 2-ciclo como uma transposição, já que é uma função que somente troca a posição de dois elementos e não altera a posição do resto dos elementos.

Proposição 1.2. *Todo k -ciclo de S_n pode ser escrito como uma composição de transposições*

Demonstração. Seja $\sigma = (i_1 \ i_2 \ \dots \ i_k)$ um k -ciclo, iremos provar que $\sigma = (i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_2)$. Vale que:

$$\begin{aligned} ((i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_2))(i_j) &= ((i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_j))(i_j) \\ &= ((i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_{j+1}))(i_1) \\ &= ((i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_{j+2}))(i_{j+1}) \\ &= i_{j+1} \\ &= \sigma(i_j) \end{aligned}$$

Como isso vale para todo $1 \leq j \leq k$ e todo elemento que não troca de lugar em σ , permanece igual em $(i_1 \ i_k) \circ (i_1 \ i_{k-1}) \circ \dots \circ (i_1 \ i_2)$, vale o resultado. $\square$

Corolário 1.2. *Toda permutação pode ser escrita como uma composição de transposições.*

Demonstração. Este resultado decorre da *Proposição 1.1* junto com a *Proposição 1.2*. $\square$

Corolário 1.3. *O conjunto $\{(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)\}$ é um conjunto gerador de S_n*

Demonstração. Para provar tal resultado, mostraremos que toda transposição (2-ciclo) pode ser escrita como composição de elementos do conjunto $\mathcal{B} = \{(1 \ 2), (2 \ 3), \dots, (n-1 \ n)\}$.

Seja $(i \ j)$ uma transposição de S_n com $1 \leq i < j \leq n$, temos que para $1 \leq k \leq n$, a função $\sigma = (i \ i+1) \circ (i+1 \ i+2) \circ \dots \circ (j-2 \ j-1) \circ (j-1 \ j) \circ (j-2 \ j-1) \circ \dots \circ (i+1 \ i+2) \circ (i \ i+1)$ avaliada em k será:

$$\sigma(k) = \begin{cases} j, & \text{se } k = i, \\ i, & \text{se } k = j, \\ k, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se k não está expresso em nenhum ciclo então essa função aplicada em k resultará em k e se k está expresso em algum ciclo, então na primeira metade da composição k irá para $k-1$ e depois voltará para k na segunda parte das iterações, logo vale que $\sigma(k) = (i \ j)(k)$.

Pelo corolário anterior, se podemos escrever cada transposição como elementos do conjunto gerador, vale que qualquer permutação pode ser escrita como a composição dos elementos do conjunto. $\square$

1.1 Tipo de Decomposição de uma Permutação

Para essa próxima seção, definiremos que duas transposições σ_1 e σ_2 possuem o mesmo tipo de decomposição se suas decomposições em ciclos disjuntos ordenados de modo crescente por número de elementos na sua representação em ciclo dada por $\sigma_1 = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \dots \circ \lambda_k$ e $\sigma_2 = \mu_1 \circ \mu_2 \circ \dots \circ \mu_k$, então vale que λ_1 possui o mesmo número de elementos de μ_1 , λ_2 possui o mesmo número de elementos de μ_2 e por assim em diante.

Lema 1.1. *Para uma permutação $\rho \in S_n$, dada por:*

$$\rho = (i_{11} \ i_{12} \ \dots \ i_{1x_1}) \circ (i_{21} \ i_{22} \ \dots \ i_{2x_2}) \circ \dots \circ (i_{t1} \ i_{t2} \ \dots \ i_{tx_t})$$

Em que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_t$.

1) *Se $\sigma \in S_n$, então a permutação $\sigma\rho\sigma^{-1}$ tem a seguinte decomposição em ciclos disjuntos:*

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = (\sigma(i_{11}) \ \sigma(i_{12}) \ \dots \ \sigma(i_{1x_1}))(\sigma(i_{21}) \ \sigma(i_{22})) \ \dots \ \sigma(i_{2x_2})) \ \dots \ (\sigma(i_{t1}) \ \sigma(i_{t2}) \ \dots \ \sigma(i_{tx_t}))$$

Ou seja, as permutações ρ e $\sigma\rho\sigma^{-1}$ têm o mesmo tipo de decomposição.

2) *Se $\rho, \rho' \in S_n$ são permutações com o mesmo tipo de decomposição, então existe $\sigma \in S_n$ tal que $\rho' = \sigma\rho\sigma^{-1}$.*

Demonstração. 1) Seja $\rho = \mu_1 \dots \mu_k$, onde μ_i são ciclos disjuntos. Suponha que $\mu_i = (a_{i-1} \dots a_{i-r})$ é um r -ciclo qualquer, para $j = 1, \dots, r-1$ temos que $\sigma\mu_i\sigma^{-1}(\sigma(a_{i-j})) = \sigma\rho(a_{i-j}) = \sigma(a_{i-j+1})$ e se $j = r$ então $\sigma\mu_i\sigma^{-1}(\sigma(a_{i-r})) = \sigma(a_{i-1})$. Se $b \notin \{a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_{i-r}\}$, $\mu_i(b) = b$ e $\sigma\mu_i\sigma^{-1}(b) = b$, ou seja $\sigma(a_{i-1} \dots a_{i-r})\sigma^{-1} = (\sigma(a_{i-1}) \dots \sigma(a_{i-r}))$.

Temos que

$$\begin{aligned} \sigma\rho\sigma^{-1} &= \sigma(a_{1-1} \dots a_{1-r_1})(a_{2-1} \dots a_{2-r_2}) \dots (a_{t-1} \dots a_{t-r_t})\sigma^{-1} \\ &= \sigma(a_{1-1} \dots a_{1-r_1})\sigma^{-1}\sigma(a_{2-1} \dots a_{2-r_2})\sigma^{-1}\sigma \dots \sigma^{-1}\sigma(a_{t-1} \dots a_{t-r_t})\sigma^{-1} \\ &= (\sigma(a_{1-1}) \dots \sigma(a_{1-r_1}))(\sigma(a_{2-1}) \dots \sigma(a_{2-r_2})) \dots (\sigma(a_{t-1}) \dots \sigma(a_{t-r_t})) \end{aligned}$$

Como $a_{i\ j} \neq a_{k\ l}$ para todo $(i, j) \neq (k, l)$ vale que $\sigma(a_{i\ j}) \neq \sigma(a_{k\ l})$, logo ρ possui o mesmo tipo de composição de $\sigma\rho\sigma^{-1}$.

2) Seja $\rho' = (b_{1\ 1} \dots b_{1\ r_1})(b_{2\ 1} \dots b_{2\ r_2}) \dots (b_{t\ 1} \dots b_{t\ r_t})$ sua decomposição em ciclos disjuntos. Tome

$$\begin{aligned}\{c_1, \dots, c_u\} &= \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^t \{a_{i\ 1}, \dots, a_{i\ r_i}\} \\ \{d_1, \dots, d_u\} &= \{1, \dots, n\} \setminus \bigcup_{i=1}^t \{b_{i\ 1}, \dots, b_{i\ r_i}\}\end{aligned}$$

Considere a seguinte permutação $\sigma \in S_n$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1r_1} & a_{21} \dots a_{2r_2} & \dots & a_{t1} \dots a_{tr_t} & c_1 \dots c_u \\ b_{11} \dots b_{1r_1} & b_{21} \dots b_{2r_2} & \dots & b_{t1} \dots b_{tr_t} & d_1 \dots d_u \end{pmatrix}$$

Pelo item anterior, vale que $\sigma\rho\sigma^{-1} = \rho'$.

□

Exercício 1.3. *Prove que os diferentes tipos de composição formam uma classe de equivalência em que se dois elementos possuem o mesmo tipo de composição, então eles serão equivalentes.*

Exemplo 1.1. *Uma partição de um número natural n é uma s -upla de números naturais $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ tais que $n \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 1$ com $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = n$.*

Quando consideramos as classes de equivalência de cada tipo de decomposição S_n , é possível associar cada classe com uma partição de n , de modo que se

$$\rho = (i_{11} \ i_{12} \ \dots \ i_{1x_1}) \circ (i_{21} \ i_{22} \ \dots \ i_{2x_2}) \circ \dots \circ (i_{t1} \ i_{t2} \ \dots \ i_{tx_k})$$

é possível criar uma função f bijetiva entre as partições de um número natural n e as classes de equivalência, logo $f(\rho) = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_k)$.

2 Grupos Alternados

Para definir os Grupos Alternados, definiremos a priori a paridade de uma permutação.

Definição 2.1 (Paridade de uma permutação). *Uma permutação é denominada par se é decomposta em um número par de transposições.*

De modo análogo, uma permutação é ímpar se é decomposta em um número ímpar de transposições.

Exercício 2.1. *Prove que a paridade de uma permutação é única.*

A paridade de uma permutação é um conceito aplicado em diversas áreas, um dos seus usos é o exemplo a seguir.

Exercício 2.2. *Seja $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}^n$, onde $\mathbb{F}$ é um corpo. Fixe $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{F}^n$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e considere a função $f(x_1, \dots, x_n) = \det[[x_1]_{\mathcal{B}} \ [x_2]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_n]_{\mathcal{B}}]$, onde $[x_i]_{\mathcal{B}}$ é a matriz horizontal dos coeficientes de x_i escrita em termos da base $\mathcal{B}$.*

Considere a ação de S_n em $\mathbb{F}^n$ dada por $\sigma(f(x_1, \dots, x_n)) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ as permutações das coordenadas de $f(x_1, \dots, x_n)$ e considere

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação par;} \\ -1, & \text{se } \sigma \text{ é uma permutação ímpar.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\det[[x_1]_{\mathcal{B}} \ [x_2]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_n]_{\mathcal{B}}] = \text{sgn}(\sigma) \det[[x_{\sigma(1)}]_{\mathcal{B}} \ [x_{\sigma(2)}]_{\mathcal{B}} \ \dots \ [x_{\sigma(n)}]_{\mathcal{B}}].$$

Exemplo 2.1 (Fórmula de Leibniz). *A fórmula de Leibniz para o cálculo do determinante de uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ é dada por*

$$\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} \text{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n a_{i, \tau(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i}$$

Tome $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ com entradas em $\mathbb{R}$, vale que

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_2} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^2 a_{\sigma(i),i} \\ &= \prod_{i=1}^2 a_{i,i} - \prod_{i=1}^2 a_{2-i,i} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \end{aligned}$$

A fórmula usual para cálculo do determinante de matriz 2×2 .

Agora, classificaremos um elemento de S_n de acordo com sua paridade.

Definição 2.2 (Grupos Alternados). *O grupo alternado A_n é o grupo que contém todas as permutações pares de S_n .*

Exercício 2.3. *Prove que $(A_n, \circ)$ é um grupo.*

Proposição 2.1. *Vale que $|A_n| = \frac{n!}{2}$ para $n \geq 2$.*

Demonstração. Provaremos que $S_n/A_n = \{\text{Id}, (1\ 2)\}$. Se $\sigma \in S_n$ é uma permutação par, então $\sigma \in A_n$ e $\sigma \cdot A_n \equiv \text{Id} \cdot A_n$. Se $\sigma \in S_n$ é ímpar, então $(1\ 2) \circ (1\ 2) \circ \sigma$ é ímpar e $(1\ 2) \circ \sigma$ é par, logo $(1\ 2) \circ \sigma \in A_n$ e $\sigma \cdot A_n \equiv (1\ 2) \cdot A_n$.

□

Outra forma de provar a proposição anterior é considerando o homomorfismo $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$, onde $\ker(\text{sgn}) = A_n$. Assim, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo.

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{A_n} &\cong \{\pm 1\} \\ |A_n| &= \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o número de permutações pares (e também ímpares) em S_n é $\frac{n!}{2}$.

Corolário 2.1. A_n é um subgrupo normal de S_n .

Proposição 2.2. Todo elemento de A_n é um produto de 3-ciclos.

Demonstração. Composto quaisquer duas transposições, temos que se a, b, c e d são elementos distintos de $1, \dots, n$.

1) $(a \ b)(a \ b) = \text{Id}$

2) $(a \ b)(a \ c) = (a \ c \ b)$

3) $(a \ b)(c \ d) = (c \ b \ d)(a \ c \ b)$

Como um elemento de A_n é sempre uma transposição par, podemos compor dois-a-dois 2-ciclos para escrever $\sigma \in A_n$ como um produto de 3-ciclos.

□

2.1 A_4 não admite elemento de ordem 6

Temos que A_4 possui tamanho igual a 12, então inicialmente é plausível que exista um elemento de ordem 6, já que pelo teorema de Lagrange, a ordem de todo subgrupo divide a ordem do grupo e, neste caso, 6 divide 12. A seguir, veremos que, apesar de ser uma possível ordem de subgrupo, não é necessário que exista um elemento com tal ordem.

Teorema 2.1. A_4 não admite elemento de ordem 6.

Demonstração. Dado $\sigma \in A_4$, se σ é um 4-ciclo ou um 2-ciclo (ou seja $\sigma = (a \ b \ c \ d) = (d \ a)(c \ a)(b \ a)$ ou $\sigma = (a \ b)$) então σ é uma transposição, então σ é ímpar, logo vale que $\sigma \in A_4$ se σ é a identidade, um 3-ciclo ou uma composição de transposições disjuntas.

1) Se $\sigma = \text{Id}$ então $|\langle \text{Id} \rangle| = 1$

2) Se $\sigma = (a \ b \ c)$ então $\sigma^2 = (a \ c \ b)$, $\sigma^3 = \text{Id}$ e $\sigma^4 = (a \ b \ c) = \sigma$, logo $|\langle (a \ b \ c) \rangle| = 3$

3) Se $\sigma = (a \ b)(c \ d)$ então $\sigma^2 = \text{Id}$ e $\sigma^3 = (a \ b)(c \ d) = \sigma$, logo $|\langle (a \ b)(c \ d) \rangle| = 2$

Ou seja, todo elemento de A_4 terá ordem 1, 2 ou 3.

□

3 Grupos Diedrais

Outro grupo diretamente relacionado são os grupos diedrais, que consistem em rotações e reflexões de polígonos.

Definição 3.1 (Grupos diedrais). *O grupo diedral D_n é o número de simetrias de um n -ágono regular. Composto de rotações r e reflexões s em que $r^n = \text{Id}$, $s^2 = \text{Id}$ e $srs = r^{-1}$.*

Isto é:

- Após rotacionar um n -ágono n vezes, voltaremos para a posição inicial.
- Após refletir um n -ágono 2 vezes voltamos para a orientação inicial.
- Se Refletir, rotacionar e refletir em sequência uma figura é o mesmo que rotacionar $n - 1$ vezes.

Exercício 3.1. *Prove que $(D_n, \circ)$ é um grupo.*

Exemplo 3.1. *Vamos observar os grupos de simetrias do triângulo e do quadrado, isto é D_3 e D_4 .*

Proposição 3.1. *Calcule a ordem de D_n e verifique que os elementos do grupo D_n serão $\{ \text{Id}, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1} \}$.*

Demonstração. Temos dois tipos de Simetrias:

- Rotações: (Identidade + $(n-1)$ rotações próprias)
- Reflexões: $(s, sr^2, \dots, sr^{n-1})$

-Note que: $s^{2k} = (s^2)^k = 1$, e $s^{2k+1} = s$ logo a composição de reflexões só é distinta para ser contada quando é acompanhada de rotações. E também $sr^n = s$, assim temos apenas reflexão com rotações até $(n-1)$.

Dessa forma, como o número de rotações possíveis é n e o de reflexões também é n , temos que $|D_n| = 2n$.

□

Proposição 3.2. D_3 é isomorfo a S_3 .

Demonstração. Mostraremos que $\varphi : D_3 \rightarrow S_3$ dado por $\varphi(s^i r^j) = (1\ 2)^i (1\ 2\ 3)^j$ é um isomorfismo de grupos.

- 1) Temos que $\varphi(s^2) = (1\ 2)^2 = \text{Id}$, $\varphi(r^3) = (1\ 2\ 3)^3 = (1\ 3\ 2)(1\ 2\ 3) = \text{Id}$ e $\varphi(srs) = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2) = \varphi(r^{-1})$, logo a função φ está bem definida.
- 2) Temos que $\varphi(sr) = (1\ 2)(1\ 2\ 3) = \varphi(s)\varphi(r)$, $\varphi(\text{Id}) = \text{Id}$, $\varphi(sr^2) = (1\ 2)(1\ 2\ 3)^2 = \varphi(s)\varphi(r^2) = \varphi(s)\varphi(r)^2$, logo é um homomorfismo.
- 3) Olhando se todos os elementos de S_3 possui imagem teremos que $\text{Id} = \varphi(\text{Id})$, $(1\ 2) = \varphi(s)$, $(1\ 3) = (1\ 2\ 3)(1\ 2) = \varphi(rs) = \varphi(sr^2)$, $(2\ 3) = (1\ 2)(1\ 2\ 3) = \varphi(sr)$, $(1\ 2\ 3) = \varphi(r)$ e $(1\ 3\ 2) = \varphi(r^2)$, logo φ é bijetiva.

□

Pelo exemplo acima percebemos que D_3 não é abeliano, e como $|D_n| = 2n$, temos que $|D_3| = 6$, o que não contradiz o fato de que um grupo de ordem menor ou igual a 5 é abeliano. Agora generalizaremos para todo D_n com $n \geq 3$

Teorema 3.1. Para $n \geq 3$, vale que D_n não é abeliano.

Demonstração. Fixe $n \geq 3$, logo $sr = srss^{-1} = r^{-1}s^{-1} = r^{n-1}s$, como $n \neq 2$, $r^{n-1} \neq r$ portanto $sr \neq rs$.

□

Exercício 3.2. Mostre que $D_n \leq S_n$.

3.1 Aplicações

Os grupos diedrais, por sua correlação geométrica, são amplamente aplicados em diversas áreas. Nesta subseção, veremos alguns exemplos.

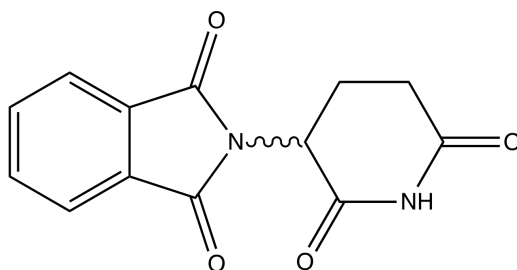
3.1.1 Física

Cristalografia é uma área que estuda a estrutura de moléculas, cristais e estruturas reticuladas. Exemplos: a molécula de H_2O pode ser vista como um grupo diedral relacionado à D_3 , o sal de cozinha ($NaCl$) como simetrias do D_4 e simetrias em formas hexagonais como o grafeno podem ser relacionadas a D_6 . Nesta área, os grupos diedrais são comumente divididos entre dois tipos: *Grupos de ponto*, grupos que descrevem uma simetria local, e *Grupos de Espaço*, que descrevem as simetrias de um cristal.

3.1.2 Química

Isomerismo é uma área da química que estuda componentes químicos que têm a mesma forma molecular, mas estruturas diferentes. Isto é, pode-se relacionar uma molécula com algum D_n e analisar as diversas rotações e reflexões da molécula, gerando compostos diferentes.

Exemplo histórico: A Talidomida ($C_{13}H_{10}N_2O_4$) é uma substância comumente usada em anti-inflamatórios e sedativos, descoberta em 1954 pela indústria alemã. As grávidas usavam geralmente para tratamento de náuseas e mal-estar. Contudo, foi notada uma quantidade grande de fetos afetados com deformações genéticas. Foi descoberto que havia duas variantes da talidomida, uma denominada S- e outra R+, com diferenças sutis como uma rotação na molécula.



Exercício 3.3. Prove que o subgrupo das rotações de D_n é isomorfo a C_n , onde C_n é o grupo cíclico de tamanho n .

Exercício 3.4. Se p é um número ímpar, verifique que $\mathbb{Z}_{2p}$ e D_p são os únicos grupos de ordem $2p$ (a menos de isomorfismos)

Referências

- [1] A. Garcia e Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*. IMPA (Projeto Euclides). Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.
- [2] R.B. Santos e A. C. Vieira. *PI-álgebras: uma introdução à PI-teoria*. 33^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2021.
- [3] S.T. Martins e E. Tengan. *Álgebra Exemplar*. IMPA (Projeto Euclides). Sociedade Brasileira de Matemática, 2020.