

O quociente universal e a representabilidade

Charles Almeida (UFMG)

Fundamentos de Espaços de Móduli em Geometria Algébrica

Aula 9b

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.

Parte I. O quociente universal.

- ① Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- ② Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- ③ As matrizes de transição e o cociclo.

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- 3 As matrizes de transição e o cociclo.
- 4 Construção de q_{univ} ;

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- 3 As matrizes de transição e o cociclo.
- 4 Construção de q_{univ} ;

Parte II. A representabilidade.

- 5 Subfuntores abertos e recobrimento do funtor.

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- 3 As matrizes de transição e o cociclo.
- 4 Construção de q_{univ} ;

Parte II. A representabilidade.

- 5 Subfuntores abertos e recobrimento do funtor.
- 6 As cartas em famílias.

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- 3 As matrizes de transição e o cociclo.
- 4 Construção de q_{univ} ;

Parte II. A representabilidade.

- 5 Subfuntores abertos e recobrimento do funtor.
- 6 As cartas em famílias.
- 7 $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Roteiro

Parte I. O quociente universal.

- 1 Colagem de feixes: o análogo do axioma da aula anterior.
- 2 Os candidatos tautológicos e a sua comparação nas sobreposições.
- 3 As matrizes de transição e o cociclo.
- 4 Construção de q_{univ} ;

Parte II. A representabilidade.

- 5 Subfuntores abertos e recobrimento do funtor.
- 6 As cartas em famílias.
- 7 $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Ordem

Primeiro **produzimos** o elemento do funtor sobre o esquema. Só depois se pode perguntar se ele é universal.

Recapitulação: o funtor de Grassmann

Definição (Aula 8)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback.

Recapitulação: o funtor de Grassmann

Definição (Aula 8)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback.

Dois pontos a reter

O alvo não é fixado: Q faz parte do dado, e exige-se apenas que seja **localmente** livre.

Recapitulação: o funtor de Grassmann

Definição (Aula 8)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback.

Dois pontos a reter

O alvo não é fixado: Q faz parte do dado, e exige-se apenas que seja **localmente** livre.

T é arbitrário: para $T = \text{Spec } k$ recuperamos as matrizes módulo GL_d da Aula 9a, mas nada impede tomar $T = \text{Grass}(V, d)$, uma vez que esse esquema exista.

Resumo: o funtor de Grassmann

Definição (Aula 8)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback.

Dois pontos a reter

O alvo não é fixado: Q faz parte do dado, e exige-se apenas que seja **localmente** livre.

T é arbitrário: para $T = \text{Spec } k$ recuperamos as matrizes módulo GL_d da Aula 9a, mas nada impede tomar $T = \text{Grass}(V, d)$, uma vez que esse esquema exista.

Um quociente sobre o próprio $\text{Grass}(V, d)$ é, por definição, um elemento de $\underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d))$. É esse elemento que a Parte I vai produzir.

O que a Aula 9a deixou em aberto

Construímos o esquema $\text{Grass}(V, d)$ colando $\binom{n}{d}$ cópias de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. Ao final, duas afirmações foram **anunciadas**, não provadas.

O que a Aula 9a deixou em aberto

Construímos o esquema $\text{Grass}(V, d)$ colando $\binom{n}{d}$ cópias de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. Ao final, duas afirmações foram **anunciadas**, não provadas.

Lacuna 1

Os quocientes tautológicos q_S , definidos carta a carta, colam num quociente global

$$q_{\text{univ}} : V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}?$$

O que a Aula 9a deixou em aberto

Construímos o esquema $\text{Grass}(V, d)$ colando $\binom{n}{d}$ cópias de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. Ao final, duas afirmações foram **anunciadas**, não provadas.

Lacuna 1

Os quocientes tautológicos q_S , definidos carta a carta, colam num quociente global

$$q_{\text{univ}} : V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}?$$

Lacuna 2

O par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa o funtor $\underline{\text{Grass}}(V, d)$?

O que a Aula 9a deixou em aberto

Construímos o esquema $\text{Grass}(V, d)$ colando $\binom{n}{d}$ cópias de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$. Ao final, duas afirmações foram **anunciadas**, não provadas.

Lacuna 1

Os quocientes tautológicos q_S , definidos carta a carta, colam num quociente global

$$q_{\text{univ}} : V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}?$$

Lacuna 2

O par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa o funtor $\underline{\text{Grass}}(V, d)?$

A Lacuna 1 vem primeiro: sem o elemento $\xi = [q_{\text{univ}}]$ não há sequer o que testar na Lacuna 2. A ferramenta para fechá-la são as **matrizes de transição**.

Recapitulação: as cartas e as transições

Para $|S| = d$, a carta é $U_S \cong \mathbb{A}^{d(n-d)} = \operatorname{Spec} k[A]$, e o ponto genérico dela é a matriz normalizada

$$M = [I_d \mid A], \quad M_S = ME_S = I_d.$$

Resumo: as cartas e as transições

Para $|S| = d$, a carta é $U_S \cong \mathbb{A}^{d(n-d)} = \text{Spec } k[A]$, e o ponto genérico dela é a matriz normalizada

$$M = [I_d \mid A], \quad M_S = ME_S = I_d.$$

Sobreposições e transições (Aula 9a)

$$U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'}) \subset U_S, \quad \varphi_{S'S}: M \mapsto M' = M_{S'}^{-1}M.$$

As entradas de M' são regulares em $D(\det M_{S'})$, pela regra de Cramer.

Resumo: as cartas e as transições

Para $|S| = d$, a carta é $U_S \cong \mathbb{A}^{d(n-d)} = \operatorname{Spec} k[A]$, e o ponto genérico dela é a matriz normalizada

$$M = [I_d \mid A], \quad M_S = ME_S = I_d.$$

Sobreposições e transições (Aula 9a)

$$U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'}) \subset U_S, \quad \varphi_{S'S}: M \mapsto M' = M_{S'}^{-1}M.$$

As entradas de M' são regulares em $D(\det M_{S'})$, pela regra de Cramer.

Cociclo (Aula 9a)

$$\varphi_{S''S'} \circ \varphi_{S'S} = \varphi_{S''S}, \quad \text{via} \quad M'_{S''} = M_{S'}^{-1}M_{S''}.$$

Resumo: as cartas e as transições

Para $|S| = d$, a carta é $U_S \cong \mathbb{A}^{d(n-d)} = \operatorname{Spec} k[A]$, e o ponto genérico dela é a matriz normalizada

$$M = [I_d \mid A], \quad M_S = ME_S = I_d.$$

Sobreposições e transições (Aula 9a)

$$U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'}) \subset U_S, \quad \varphi_{S'S}: M \mapsto M' = M_{S'}^{-1} M.$$

As entradas de M' são regulares em $D(\det M_{S'})$, pela regra de Cramer.

Cociclo (Aula 9a)

$$\varphi_{S''S'} \circ \varphi_{S'S} = \varphi_{S''S}, \quad \text{via} \quad M'_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''}.$$

Toda a Parte I consiste em reler essas mesmas matrizes como dado de colagem de um **feixe**, e não apenas de um espaço.

Dois fatos importados

Teorema (Equivariância da seleção, Aula 9a)

Com $E_S \in \text{Mat}_{n \times d}$ a matriz das colunas e_i , $i \in S$, e $M_S := ME_S$,

$$(gM)_S = g M_S \quad \text{para todo } g.$$

Dois fatos importados

Teorema (Equivariância da seleção, Aula 9a)

Com $E_S \in \text{Mat}_{n \times d}$ a matriz das colunas e_i , $i \in S$, e $M_S := ME_S$,

$$(gM)_S = g M_S \quad \text{para todo } g.$$

Teorema (Critério do núcleo, Aula 9a)

Se $q, q': V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q, Q'$ têm o mesmo núcleo, existe um **único** isomorfismo $\theta: Q \rightarrow Q'$ com $\theta \circ q = q'$.

Dois fatos importados

Teorema (Equivariância da seleção, Aula 9a)

Com $E_S \in \text{Mat}_{n \times d}$ a matriz das colunas e_i , $i \in S$, e $M_S := ME_S$,

$$(gM)_S = g M_S \quad \text{para todo } g.$$

Teorema (Critério do núcleo, Aula 9a)

Se $q, q': V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q, Q'$ têm o mesmo núcleo, existe um **único** isomorfismo $\theta: Q \rightarrow Q'$ com $\theta \circ q = q'$.

Razão. Ambos são conúcleos do mesmo subfeixe K , logo $Q \cong (V \otimes \mathcal{O}_T)/K \cong Q'$. A unicidade vem da sobrejetividade de q : se $\theta q = \theta' q$, então $\theta - \theta'$ anula toda seção local. □

A seleção de colunas, em famílias

Na Aula 9a, $M_S = ME_S$ era produto de matrizes numéricas. Precisamos da mesma operação com alvo um feixe qualquer.

A seleção de colunas, em famílias

Na Aula 9a, $M_S = ME_S$ era produto de matrizes numéricas. Precisamos da mesma operação com alvo um feixe qualquer.

Definição

Lemos E_S como o morfismo $E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T$, $f_r \mapsto e_{j_r}$, onde $S = \{j_1 < \dots < j_d\}$, e escrevemos qE_S para a **composta** $\mathcal{O}_T^d \xrightarrow{E_S} V \otimes_k \mathcal{O}_T \xrightarrow{q} Q$.

A seleção de colunas, em famílias

Na Aula 9a, $M_S = ME_S$ era produto de matrizes numéricas. Precisamos da mesma operação com alvo um feixe qualquer.

Definição

Lemos E_S como o morfismo $E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T$, $f_r \mapsto e_{j_r}$, onde $S = \{j_1 < \dots < j_d\}$, e escrevemos qE_S para a **composta** $\mathcal{O}_T^d \xrightarrow{E_S} V \otimes_k \mathcal{O}_T \xrightarrow{q} Q$.

Coerência com a Aula 9a

Se $Q = \mathcal{O}_T^d$, então q é uma matriz e qE_S é o bloco das colunas indexadas por S . Para Q arbitrário não há matriz, mas a composta continua fazendo sentido.

A seleção de colunas, em famílias

Na Aula 9a, $M_S = ME_S$ era produto de matrizes numéricas. Precisamos da mesma operação com alvo um feixe qualquer.

Definição

Lemos E_S como o morfismo $E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T$, $f_r \mapsto e_{j_r}$, onde $S = \{j_1 < \dots < j_d\}$, e escrevemos qE_S para a **composta** $\mathcal{O}_T^d \xrightarrow{E_S} V \otimes_k \mathcal{O}_T \xrightarrow{q} Q$.

Coerência com a Aula 9a

Se $Q = \mathcal{O}_T^d$, então q é uma matriz e qE_S é o bloco das colunas indexadas por S . Para Q arbitrário não há matriz, mas a composta continua fazendo sentido.

Duas propriedades, usadas o tempo todo

$$(E1) \quad (\theta q)E_S = \theta(qE_S); \quad (E2) \quad f^*(qE_S) = (f^*q)E_S.$$

(E1) é a associatividade da composição, e substitui a equivariância. (E2) vale porque E_S tem entradas **constantes**, logo $f^*E_S = E_S$.

Os candidatos tautológicos

Sobre $U_S = \operatorname{Spec} k[A]$, a matriz $[I_d \mid A]$, de entradas em $\mathcal{O}_{U_S}$, define

$$q_S: V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d =: Q_S.$$

Os candidatos tautológicos

Sobre $U_S = \operatorname{Spec} k[A]$, a matriz $[I_d \mid A]$, de entradas em $\mathcal{O}_{U_S}$, define

$$q_S: V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d =: Q_S.$$

Teorema

q_S é sobrejetora, Q_S é livre de posto d , e $q_S E_S = \operatorname{id}$.

Os candidatos tautológicos

Sobre $U_S = \operatorname{Spec} k[A]$, a matriz $[I_d \mid A]$, de entradas em $\mathcal{O}_{U_S}$, define

$$q_S: V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d =: Q_S.$$

Teorema

q_S é sobrejetora, Q_S é livre de posto d , e $q_S E_S = \operatorname{id}$.

Demonstração. A identidade $q_S E_S = M_S = I_d$ é a normalização da carta.

Os candidatos tautológicos

Sobre $U_S = \operatorname{Spec} k[A]$, a matriz $[I_d \mid A]$, de entradas em $\mathcal{O}_{U_S}$, define

$$q_S: V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d =: Q_S.$$

Teorema

q_S é sobrejetora, Q_S é livre de posto d , e $q_S E_S = \operatorname{id}$.

Demonstração. A identidade $q_S E_S = M_S = I_d$ é a normalização da carta. Dela sai a sobrejetividade: toda seção local u de $\mathcal{O}_{U_S}^d$ satisfaz

$$u = q_S(E_S u),$$

logo está na imagem. □

Os candidatos tautológicos

Sobre $U_S = \operatorname{Spec} k[A]$, a matriz $[I_d \mid A]$, de entradas em $\mathcal{O}_{U_S}$, define

$$q_S: V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S} \longrightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d =: Q_S.$$

Teorema

q_S é sobrejetora, Q_S é livre de posto d , e $q_S E_S = \operatorname{id}$.

Demonstração. A identidade $q_S E_S = M_S = I_d$ é a normalização da carta. Dela sai a sobrejetividade: toda seção local u de $\mathcal{O}_{U_S}^d$ satisfaz

$$u = q_S(E_S u),$$

logo está na imagem. □

Sobrejetividade **global**, sem passar a talos: as colunas do bloco I_d já geram o alvo em todo ponto da carta.

Leitura de $q_{S'}$ na carta S

Os dois candidatos vivem em cartas diferentes. Para compará-los, identificamos $U_S \cap U_{S'}$ com $D(\det M_{S'}) \subset U_S$ via $\varphi_{S'S}$.

Leitura de $q_{S'}$ na carta S

Os dois candidatos vivem em cartas diferentes. Para compará-los, identificamos $U_S \cap U_{S'}$ com $D(\det M_{S'}) \subset U_S$ via $\varphi_{S'S}$.

O que a transição diz

Nessa identificação, a matriz de $q_{S'}$ escreve-se nas coordenadas A da carta S como

$$M' = M_{S'}^{-1} M, \quad \text{isto é,} \quad q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S.$$

Leitura de $q_{S'}$ na carta S

Os dois candidatos vivem em cartas diferentes. Para compará-los, identificamos $U_S \cap U_{S'}$ com $D(\det M_{S'}) \subset U_S$ via $\varphi_{S'S}$.

O que a transição diz

Nessa identificação, a matriz de $q_{S'}$ escreve-se nas coordenadas A da carta S como

$$M' = M_{S'}^{-1} M, \quad \text{isto é,} \quad q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S.$$

Mesmo quociente, bases diferentes no alvo

Não estamos descobrindo um quociente novo ao mudar de carta. O quociente é o **mesmo**; o que muda é a maneira de identificar o alvo com $\mathcal{O}^d$.

Leitura de $q_{S'}$ na carta S

Os dois candidatos vivem em cartas diferentes. Para compará-los, identificamos $U_S \cap U_{S'}$ com $D(\det M_{S'}) \subset U_S$ via $\varphi_{S'S}$.

O que a transição diz

Nessa identificação, a matriz de $q_{S'}$ escreve-se nas coordenadas A da carta S como

$$M' = M_{S'}^{-1} M, \quad \text{isto é,} \quad q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S.$$

Mesmo quociente, bases diferentes no alvo

Não estamos descobrindo um quociente novo ao mudar de carta. O quociente é o **mesmo**; o que muda é a maneira de identificar o alvo com $\mathcal{O}^d$.

Duas coisas diferentes, desde já

O produto $M_{S'}^{-1} M$ faz duas coisas ao mesmo tempo: as **entradas** das colunas fora de S' são as novas coordenadas do mesmo ponto, isto é $\varphi_{S'S}$, que colou $\text{Grass}(V, d)$; e o **fator** $M_{S'}^{-1}$ será a mudança de trivialização do quociente, que colará Q_{univ} .

O isomorfismo de comparação

Teorema

Sobre $U_{SS'} := U_S \cap U_{S'}$, existe um único isomorfismo

$$\theta_{S'S}: Q_S|_{U_{SS'}} \longrightarrow Q_{S'}|_{U_{SS'}} \quad \text{com} \quad \theta_{S'S} \circ q_S = q_{S'},$$

a saber a multiplicação à esquerda por

$$g_{S'S} := M_{S'}^{-1} \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_{U_{SS'}}).$$

Em particular $\text{Ker } q_S = \text{Ker } q_{S'}$: os dois definem o mesmo elemento do funtor.

O isomorfismo de comparação

Teorema

Sobre $U_{SS'} := U_S \cap U_{S'}$, existe um único isomorfismo

$$\theta_{S'S}: Q_S|_{U_{SS'}} \longrightarrow Q_{S'}|_{U_{SS'}} \quad \text{com} \quad \theta_{S'S} \circ q_S = q_{S'},$$

a saber a multiplicação à esquerda por

$$g_{S'S} := M_{S'}^{-1} \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_{U_{SS'}}).$$

Em particular $\text{Ker } q_S = \text{Ker } q_{S'}$: os dois definem o mesmo elemento do funtor.

Existência. $q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S$ pelo slide anterior, e a multiplicação por $M_{S'}^{-1}$ é invertível, com inversa a multiplicação por $M_{S'}$.

O isomorfismo de comparação

Teorema

Sobre $U_{SS'} := U_S \cap U_{S'}$, existe um único isomorfismo

$$\theta_{S'S}: Q_S|_{U_{SS'}} \longrightarrow Q_{S'}|_{U_{SS'}} \quad \text{com} \quad \theta_{S'S} \circ q_S = q_{S'},$$

a saber a multiplicação à esquerda por

$$g_{S'S} := M_{S'}^{-1} \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_{U_{SS'}}).$$

Em particular $\text{Ker } q_S = \text{Ker } q_{S'}$: os dois definem o mesmo elemento do funtor.

Existência. $q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S$ pelo slide anterior, e a multiplicação por $M_{S'}^{-1}$ é invertível, com inversa a multiplicação por $M_{S'}$.

Unicidade. Se $\theta q_S = \theta' q_S$, então $\theta - \theta'$ anula toda seção local, pois q_S é sobrejetora; logo $\theta = \theta'$.

O isomorfismo de comparação

Teorema

Sobre $U_{SS'} := U_S \cap U_{S'}$, existe um único isomorfismo

$$\theta_{S'S}: Q_S|_{U_{SS'}} \longrightarrow Q_{S'}|_{U_{SS'}} \quad \text{com} \quad \theta_{S'S} \circ q_S = q_{S'},$$

a saber a multiplicação à esquerda por

$$g_{S'S} := M_{S'}^{-1} \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_{U_{SS'}}).$$

Em particular $\text{Ker } q_S = \text{Ker } q_{S'}$: os dois definem o mesmo elemento do funtor.

Existência. $q_{S'} = M_{S'}^{-1} q_S$ pelo slide anterior, e a multiplicação por $M_{S'}^{-1}$ é invertível, com inversa a multiplicação por $M_{S'}$.

Unicidade. Se $\theta q_S = \theta' q_S$, então $\theta - \theta'$ anula toda seção local, pois q_S é sobrejetora; logo $\theta = \theta'$.

Núcleos. $q_{S'}(v) = 0 \iff \theta_{S'S}(q_S(v)) = 0 \iff q_S(v) = 0$, pois $\theta_{S'S}$ é injetora.

□

O cociclo, agora de um fibrado

$$(C0) \quad g_{SS} = M_S^{-1} = I_d, \text{ logo } \theta_{SS} = \text{id}.$$

O cociclo, agora de um fibrado

(C0) $g_{SS} = M_S^{-1} = I_d$, logo $\theta_{SS} = \text{id}$. **(C2)** Pela equivariância aplicada a $g = M_{S'}^{-1}$ e ao conjunto S'' ,

$$M'_{S''} = (M_{S'}^{-1}M)_{S''} = M_{S'}^{-1}M_{S''} \implies (M'_{S''})^{-1} = M_{S''}^{-1}M_{S'}.$$

O cociclo, agora de um fibrado

(C0) $g_{SS} = M_S^{-1} = I_d$, logo $\theta_{SS} = \text{id}$. **(C2)** Pela equivariância aplicada a $g = M_{S'}^{-1}$ e ao conjunto S'' ,

$$M'_{S''} = (M_{S'}^{-1} M)_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''} \implies (M'_{S''})^{-1} = M_{S''}^{-1} M_{S'}.$$

Portanto

$$g_{S''S'} g_{S'S} = (M_{S''}^{-1} M_{S'}) (M_{S'}^{-1}) = M_{S''}^{-1} = g_{S''S}.$$

O cociclo, agora de um fibrado

(C0) $g_{SS} = M_S^{-1} = I_d$, logo $\theta_{SS} = \text{id}$. **(C2)** Pela equivariância aplicada a $g = M_{S'}^{-1}$ e ao conjunto S'' ,

$$M'_{S''} = (M_{S'}^{-1} M)_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''} \implies (M'_{S''})^{-1} = M_{S''}^{-1} M_{S'}.$$

Portanto

$$g_{S''S'} g_{S'S} = (M_{S''}^{-1} M_{S'}) (M_{S'}^{-1}) = M_{S''}^{-1} = g_{S''S}.$$

Uma identidade, duas funções

A **mesma** conta da Aula 9a serve duas vezes: lá foi a condição (C2) que permitiu colar o **esquema**; aqui é a condição de cociclo que permite colar o **feixe**.

Colagem de feixes localmente livres

Temos as $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$, o cociclo e a compatibilidade $q_{S'} = g_{S'S}q_S$. É exatamente o dado que o mecanismo geral de colagem consome.

Colagem de feixes localmente livres

Temos as $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$, o cociclo e a compatibilidade $q_{S'} = g_{S'S}q_S$. É exatamente o dado que o mecanismo geral de colagem consome.

Teorema (Colagem por matrizes de transição)

Sejam $X = \bigcup_i X_i$ um recobrimento aberto e, para cada par (i, j) , uma matriz

$$g_{ji} \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}(X_i \cap X_j))$$

tal que

$$(C0) \quad g_{ii} = I_d; \quad (C2) \quad g_{kj} g_{ji} = g_{ki} \quad \text{em } X_i \cap X_j \cap X_k.$$

Então existe um $\mathcal{O}_X$ -módulo Q **localmente livre de posto d** , único a menos de isomorfismo, munido de trivializações

$$\tau_i: Q|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_i}^d \quad \text{com} \quad \tau_j \circ \tau_i^{-1} = g_{ji} \quad \text{em } X_i \cap X_j.$$

Colagem de feixes localmente livres

Temos as $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$, o cociclo e a compatibilidade $q_{S'} = g_{S'S}q_S$. É exatamente o dado que o mecanismo geral de colagem consome.

Teorema (Colagem por matrizes de transição)

Sejam $X = \bigcup_i X_i$ um recobrimento aberto e, para cada par (i, j) , uma matriz

$$g_{ji} \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}(X_i \cap X_j))$$

tal que

$$(C0) \quad g_{ii} = I_d; \quad (C2) \quad g_{kj} g_{ji} = g_{ki} \quad \text{em } X_i \cap X_j \cap X_k.$$

Então existe um $\mathcal{O}_X$ -módulo Q **localmente livre de posto d** , único a menos de isomorfismo, munido de trivializações

$$\tau_i: Q|_{X_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_i}^d \quad \text{com} \quad \tau_j \circ \tau_i^{-1} = g_{ji} \quad \text{em } X_i \cap X_j.$$

De (C0) e (C2) com $k = i$ sai $g_{ij}g_{ji} = I_d$: as transições de um par são mutuamente inversas, como as φ_{ij} da Aula 9a.

O feixe colado e os morfismos

Como são as seções

$$Q(W) = \left\{ (s_i)_i : s_i \in \mathcal{O}(W \cap X_i)^d, \quad s_j = g_{ji} s_i \text{ em } W \cap X_i \cap X_j \right\},$$

e a trivialização τ_i é $(s_i)_i \mapsto s_i$.

O feixe colado e os morfismos

Como são as seções

$$Q(W) = \left\{ (s_i)_i : s_i \in \mathcal{O}(W \cap X_i)^d, \quad s_j = g_{ji} s_i \text{ em } W \cap X_i \cap X_j \right\},$$

e a trivialização τ_i é $(s_i)_i \mapsto s_i$.

Colagem de morfismos: a forma que usaremos

Sejam E um $\mathcal{O}_X$ -módulo e morfismos $q_i: E|_{X_i} \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}^d$ com $q_j = g_{ji} q_i$ em $X_i \cap X_j$. Então existe um único $q: E \rightarrow Q$ com $\tau_i \circ q|_{X_i} = q_i$; se cada q_i é sobrejetor, q é sobrejetor.

O feixe colado e os morfismos

Como são as seções

$$Q(W) = \left\{ (s_i)_i : s_i \in \mathcal{O}(W \cap X_i)^d, \quad s_j = g_{ji} s_i \text{ em } W \cap X_i \cap X_j \right\},$$

e a trivialização τ_i é $(s_i)_i \mapsto s_i$.

Colagem de morfismos: a forma que usaremos

Sejam E um $\mathcal{O}_X$ -módulo e morfismos $q_i: E|_{X_i} \rightarrow \mathcal{O}_{X_i}^d$ com $q_j = g_{ji} q_i$ em $X_i \cap X_j$. Então existe um único $q: E \rightarrow Q$ com $\tau_i \circ q|_{X_i} = q_i$; se cada q_i é sobrejetor, q é sobrejetor.

Já temos as três hipóteses

(C0) e (C2) foram verificadas no slide do cociclo, e a compatibilidade $q_{s'} = g_{s's} q_s$ é o isomorfismo de comparação. Resta aplicar o lema.

O quociente universal

Teorema

Existe um único par $(Q_{\text{univ}}, q_{\text{univ}})$, com Q_{univ} localmente livre de posto d sobre $\text{Grass}(V, d)$ e $q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}$, munido de isomorfismos

$$\tau_S: Q_{\text{univ}}|_{U_S} \longrightarrow Q_S, \quad \tau_S \circ q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S.$$

O quociente universal

Teorema

Existe um único par $(Q_{\text{univ}}, q_{\text{univ}})$, com Q_{univ} localmente livre de posto d sobre $\text{Grass}(V, d)$ e $q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}$, munido de isomorfismos

$$\tau_S: Q_{\text{univ}}|_{U_S} \longrightarrow Q_S, \quad \tau_S \circ q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S.$$

Demonstração. As matrizes $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ satisfazem (C0) e (C2), logo a colagem por matrizes de transição fornece Q_{univ} , localmente livre de posto d , e as trivializações τ_S com $\tau_{S'}\tau_S^{-1} = g_{S'S}$.

O quociente universal

Teorema

Existe um único par $(Q_{\text{univ}}, q_{\text{univ}})$, com Q_{univ} localmente livre de posto d sobre $\text{Grass}(V, d)$ e $q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}$, munido de isomorfismos

$$\tau_S: Q_{\text{univ}}|_{U_S} \longrightarrow Q_S, \quad \tau_S \circ q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S.$$

Demonstração. As matrizes $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ satisfazem (C0) e (C2), logo a colagem por matrizes de transição fornece Q_{univ} , localmente livre de posto d , e as trivializações τ_S com $\tau_{S'}\tau_S^{-1} = g_{S'S}$.

Além disso $q_{S'} = g_{S'S}q_S$ nas sobreposições, que é a hipótese do lema de colagem de morfismos, com $E = V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$. Ele fornece q_{univ} com $\tau_S q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S$.

O quociente universal

Teorema

Existe um único par $(Q_{\text{univ}}, q_{\text{univ}})$, com Q_{univ} localmente livre de posto d sobre $\text{Grass}(V, d)$ e $q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}$, munido de isomorfismos

$$\tau_S: Q_{\text{univ}}|_{U_S} \longrightarrow Q_S, \quad \tau_S \circ q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S.$$

Demonstração. As matrizes $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ satisfazem (C0) e (C2), logo a colagem por matrizes de transição fornece Q_{univ} , localmente livre de posto d , e as trivializações τ_S com $\tau_{S'}\tau_S^{-1} = g_{S'S}$.

Além disso $q_{S'} = g_{S'S}q_S$ nas sobreposições, que é a hipótese do lema de colagem de morfismos, com $E = V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$. Ele fornece q_{univ} com $\tau_S q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S$. Cada q_S é sobrejetora, logo q_{univ} é sobrejetora. $\square$

O quociente universal

Teorema

Existe um único par $(Q_{\text{univ}}, q_{\text{univ}})$, com Q_{univ} localmente livre de posto d sobre $\text{Grass}(V, d)$ e $q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \twoheadrightarrow Q_{\text{univ}}$, munido de isomorfismos

$$\tau_S: Q_{\text{univ}}|_{U_S} \longrightarrow Q_S, \quad \tau_S \circ q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S.$$

Demonstração. As matrizes $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ satisfazem (C0) e (C2), logo a colagem por matrizes de transição fornece Q_{univ} , localmente livre de posto d , e as trivializações τ_S com $\tau_{S'}\tau_S^{-1} = g_{S'S}$.

Além disso $q_{S'} = g_{S'S}q_S$ nas sobreposições, que é a hipótese do lema de colagem de morfismos, com $E = V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$. Ele fornece q_{univ} com $\tau_S q_{\text{univ}}|_{U_S} = q_S$. Cada q_S é sobrejetora, logo q_{univ} é sobrejetora. $\square$

Falta uma observação, que é o ponto de tudo: este par é, ele próprio, um elemento do funtor.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

- 1 **Fonte:** q_{univ} está definido sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$, e não sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S}$.
É o que a colagem de morfismos entregou.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

- 1 **Fonte:** q_{univ} está definido sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$, e não sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S}$. É o que a colagem de morfismos entregou.
- 2 **Sobrejetividade:** é condição local, e cada q_S é sobrejetora.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

- 1 **Fonte:** q_{univ} está definido sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$, e não sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S}$. É o que a colagem de morfismos entregou.
- 2 **Sobrejetividade:** é condição local, e cada q_S é sobrejetora.
- 3 **Alvo:** Q_{univ} é localmente livre de posto d , com trivializações τ_S . Em geral **não** é livre: para $d = 1$ ele é $\mathcal{O}(1)$.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

- ❶ **Fonte:** q_{univ} está definido sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$, e não sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S}$. É o que a colagem de morfismos entregou.
- ❷ **Sobrejetividade:** é condição local, e cada q_S é sobrejetora.
- ❸ **Alvo:** Q_{univ} é localmente livre de posto d , com trivializações τ_S . Em geral **não** é livre: para $d = 1$ ele é $\mathcal{O}(1)$.

A classe

A colagem determina o par a menos de isomorfismo único do alvo, que é exatamente a relação $\sim$. Por isso escreve-se $\xi := [q_{\text{univ}}]$.

q_{univ} é um elemento do funtor

Basta aplicar a definição do funtor com $T = \text{Grass}(V, d)$ e conferir os três requisitos.

- ❶ **Fonte:** q_{univ} está definido sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)}$, e não sobre $V \otimes_k \mathcal{O}_{U_S}$. É o que a colagem de morfismos entregou.
- ❷ **Sobrejetividade:** é condição local, e cada q_S é sobrejetora.
- ❸ **Alvo:** Q_{univ} é localmente livre de posto d , com trivializações τ_S . Em geral **não** é livre: para $d = 1$ ele é $\mathcal{O}(1)$.

A classe

A colagem determina o par a menos de isomorfismo único do alvo, que é exatamente a relação $\sim$. Por isso escreve-se $\xi := [q_{\text{univ}}]$.

$\xi \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d))$. A Lacuna 1 está fechada. Se o funtor exigisse alvo **livre**, o item 3 falharia e a grassmanniana não seria representável.

As trivializações são canônicas

Teorema

$\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$ e, sobre $U_S \cap U_{S'}$,

$$\tau_{S'} \circ \tau_S^{-1} = g_{S'S} = M_{S'}^{-1}.$$

As trivializações são canônicas

Teorema

$\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$ e, sobre $U_S \cap U_{S'}$,

$$\tau_{S'} \circ \tau_S^{-1} = g_{S'S} = M_{S'}^{-1}.$$

Demonstração. Compondo $\tau_S q_{\text{univ}} = q_S$ com E_S :

$$\tau_S (q_{\text{univ}} E_S) = q_S E_S = \text{id},$$

e τ_S é isomorfismo, logo $q_{\text{univ}} E_S = \tau_S^{-1}$.

As trivializações são canônicas

Teorema

$\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$ e, sobre $U_S \cap U_{S'}$,

$$\tau_{S'} \circ \tau_S^{-1} = g_{S'S} = M_{S'}^{-1}.$$

Demonstração. Compondo $\tau_S q_{\text{univ}} = q_S$ com E_S :

$$\tau_S(q_{\text{univ}} E_S) = q_S E_S = \text{id},$$

e τ_S é isomorfismo, logo $q_{\text{univ}} E_S = \tau_S^{-1}$. A segunda identidade é $\tau_{S'} = \theta_{S'S} \tau_S$ composta com τ_S^{-1} . □

As trivializações são canônicas

Teorema

$\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$ e, sobre $U_S \cap U_{S'}$,

$$\tau_{S'} \circ \tau_S^{-1} = g_{S'S} = M_{S'}^{-1}.$$

Demonstração. Compondo $\tau_S q_{\text{univ}} = q_S$ com E_S :

$$\tau_S (q_{\text{univ}} E_S) = q_S E_S = \text{id},$$

e τ_S é isomorfismo, logo $q_{\text{univ}} E_S = \tau_S^{-1}$. A segunda identidade é $\tau_{S'} = \theta_{S'S} \tau_S$ composta com τ_S^{-1} . □

Definição

As $g_{S'S}$ são as **matrizes de transição** de Q_{univ} relativas ao recobrimento $\{U_S\}$ e às trivializações τ_S .

As trivializações são canônicas

Teorema

$\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$ e, sobre $U_S \cap U_{S'}$,

$$\tau_{S'} \circ \tau_S^{-1} = g_{S'S} = M_{S'}^{-1}.$$

Demonstração. Composto $\tau_S q_{\text{univ}} = q_S$ com E_S :

$$\tau_S (q_{\text{univ}} E_S) = q_S E_S = \text{id},$$

e τ_S é isomorfismo, logo $q_{\text{univ}} E_S = \tau_S^{-1}$. A segunda identidade é $\tau_{S'} = \theta_{S'S} \tau_S$ composta com τ_S^{-1} . □

Definição

As $g_{S'S}$ são as **matrizes de transição** de Q_{univ} relativas ao recobrimento $\{U_S\}$ e às trivializações τ_S .

Nenhuma escolha foi feita: a trivialização na carta S é a inversa da seleção das colunas de S .

Cuidado: duas transições diferentes

Retomando a distinção anunciada, agora com as trivializações em mãos.

Cuidado: duas transições diferentes

Retomando a distinção anunciada, agora com as trivializações em mãos.

(i) Mudança de coordenadas da base

As coordenadas A' da carta $U_{S'}$ em função de A são as **entradas** das colunas fora de S' do produto. É o isomorfismo $\varphi_{S'S}$ entre abertos de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$, usado para colar o esquema.

Cuidado: duas transições diferentes

Retomando a distinção anunciada, agora com as trivializações em mãos.

(i) Mudança de coordenadas da base

As coordenadas A' da carta $U_{S'}$ em função de A são as **entradas** das colunas fora de S' do produto. É o isomorfismo $\varphi_{S'S}$ entre abertos de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$, usado para colar o esquema.

(ii) Transição do fibrado

$g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ é o **fator** que multiplica à esquerda. É um elemento de GL_d sobre a sobreposição, e compara τ_S com $\tau_{S'}$.

Cuidado: duas transições diferentes

Retomando a distinção anunciada, agora com as trivializações em mãos.

(i) Mudança de coordenadas da base

As coordenadas A' da carta $U_{S'}$ em função de A são as **entradas** das colunas fora de S' do produto. É o isomorfismo $\varphi_{S'S}$ entre abertos de $\mathbb{A}^{d(n-d)}$, usado para colar o esquema.

(ii) Transição do fibrado

$g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$ é o **fator** que multiplica à esquerda. É um elemento de GL_d sobre a sobreposição, e compara τ_S com $\tau_{S'}$.

Mesma conta, duas leituras: as entradas do produto descrevem o **ponto**; o fator descreve o **fibrado**.

O caso $d = 1$: $Q_{\text{univ}} = \mathcal{O}(1)$

Cartas $U_{\{i\}}$, com M a matriz $1 \times n$ normalizada por 1 na posição i e $M_{\{j\}} = a_j$ a sua j -ésima entrada:

$$U_{\{i\}} \cap U_{\{j\}} = \{a_j \neq 0\}, \quad g_{\{j\}\{i\}} = a_j^{-1} \in \mathcal{O}^\times.$$

O caso $d = 1$: $Q_{\text{univ}} = \mathcal{O}(1)$

Cartas $U_{\{i\}}$, com M a matriz $1 \times n$ normalizada por 1 na posição i e $M_{\{j\}} = a_j$ a sua j -ésima entrada:

$$U_{\{i\}} \cap U_{\{j\}} = \{a_j \neq 0\}, \quad g_{\{j\}\{i\}} = a_j^{-1} \in \mathcal{O}^\times.$$

Identificando $U_{\{i\}}$ com $\{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, tem-se $a_j = x_j/x_i$ e

$$g_{\{j\}\{i\}} = \frac{x_i}{x_j}.$$

O caso $d = 1$: $Q_{\text{univ}} = \mathcal{O}(1)$

Cartas $U_{\{i\}}$, com M a matriz $1 \times n$ normalizada por 1 na posição i e $M_{\{j\}} = a_j$ a sua j -ésima entrada:

$$U_{\{i\}} \cap U_{\{j\}} = \{a_j \neq 0\}, \quad g_{\{j\}\{i\}} = a_j^{-1} \in \mathcal{O}^\times.$$

Identificando $U_{\{i\}}$ com $\{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, tem-se $a_j = x_j/x_i$ e

$$g_{\{j\}\{i\}} = \frac{x_i}{x_j}.$$

Reconhecimento

Uma seção de $\mathcal{O}(1)$ escreve-se $s = f_i x_i$ na carta i e $s = f_j x_j$ na carta j , donde $f_j = f_i(x_i/x_j)$. É o mesmo cociclo, logo

$$Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1), \quad q_{\text{univ}}(e_j) = x_j.$$

O caso $d = 1$: $Q_{\text{univ}} = \mathcal{O}(1)$

Cartas $U_{\{i\}}$, com M a matriz $1 \times n$ normalizada por 1 na posição i e $M_{\{j\}} = a_j$ a sua j -ésima entrada:

$$U_{\{i\}} \cap U_{\{j\}} = \{a_j \neq 0\}, \quad g_{\{j\}\{i\}} = a_j^{-1} \in \mathcal{O}^\times.$$

Identificando $U_{\{i\}}$ com $\{x_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^{n-1}$, tem-se $a_j = x_j/x_i$ e

$$g_{\{j\}\{i\}} = \frac{x_i}{x_j}.$$

Reconhecimento

Uma seção de $\mathcal{O}(1)$ escreve-se $s = f_i x_i$ na carta i e $s = f_j x_j$ na carta j , donde $f_j = f_i(x_i/x_j)$. É o mesmo cociclo, logo

$$Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1), \quad q_{\text{univ}}(e_j) = x_j.$$

“ Q_{univ} é localmente livre de posto 1” não permite calcular nada. Com o cociclo, identifica-se o feixe.

Balanço da Parte I

Temos agora um par

$$(\text{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\text{univ}}] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\text{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\text{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\text{univ}}].$$

Balanço da Parte I

Temos agora um par

$$(\text{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\text{univ}}] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\text{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\text{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\text{univ}}].$$

Está bem definida

f^* é exato à direita, logo preserva sobrejeções, e preserva módulos localmente livres de posto d . A naturalidade é $(g \circ f)^* = f^* g^*$.

Balanço da Parte I

Temos agora um par

$$(\text{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\text{univ}}] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\text{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\text{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\text{univ}}].$$

Está bem definida

f^* é exato à direita, logo preserva sobrejeções, e preserva módulos localmente livres de posto d . A naturalidade é $(g \circ f)^* = f^* g^*$.

Lacuna 2

Representar o funtor significa: η_T é **bijetora** para todo T . É o que resta provar.

A estratégia

Dado $q: V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q$, queremos produzir um único $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $f^*q_{\text{univ}} \sim q$.

A estratégia

Dado $q: V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q$, queremos produzir um único $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $f^*q_{\text{univ}} \sim q$.

Onde f deve mandar cada ponto

Se f existe e $f(t) \in U_S$, então perto de t o quociente q tem a forma normalizada da carta S . Isso só é possível onde qE_S é isomorfismo.

A estratégia

Dado $q: V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q$, queremos produzir um único $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $f^*q_{\text{univ}} \sim q$.

Onde f deve mandar cada ponto

Se f existe e $f(t) \in U_S$, então perto de t o quociente q tem a forma normalizada da carta S . Isso só é possível onde qE_S é isomorfismo.

Os três ingredientes

- ① “ qE_S é isomorfismo” recorta um **aberto** $T_S \subset T$;
- ② esses abertos **recobrem** T ;
- ③ sobre T_S , os morfismos $T_S \rightarrow U_S$ são exatamente as matrizes normalizadas.

A estratégia

Dado $q: V \otimes \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q$, queremos produzir um único $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $f^*q_{\text{univ}} \sim q$.

Onde f deve mandar cada ponto

Se f existe e $f(t) \in U_S$, então perto de t o quociente q tem a forma normalizada da carta S . Isso só é possível onde qE_S é isomorfismo.

Os três ingredientes

- ① “ qE_S é isomorfismo” recorta um **aberto** $T_S \subset T$;
- ② esses abertos **recobrem** T ;
- ③ sobre T_S , os morfismos $T_S \rightarrow U_S$ são exatamente as matrizes normalizadas.

Antes disso, a linguagem: o que significa dizer que as cartas recobrem o **functor**, e não um espaço.

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

O que a condição garante

Ela é o necessário para que G seja funtor: $G(f)$ é a restrição de $F(f)$. As inclusões dão uma transformação natural $G \rightarrow F$ com componentes injetoras.

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

O que a condição garante

Ela é o necessário para que G seja funtor: $G(f)$ é a restrição de $F(f)$. As inclusões dão uma transformação natural $G \rightarrow F$ com componentes injetoras.

Exemplo

Para $U \subset X$ aberto, $h_U(T) = \{g: T \rightarrow X : g(T) \subset U\}$ é subfuntor de h_X : se $g(T) \subset U$, então $(g \circ f)(T') \subset U$.

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

O que a condição garante

Ela é o necessário para que G seja funtor: $G(f)$ é a restrição de $F(f)$. As inclusões dão uma transformação natural $G \rightarrow F$ com componentes injetoras.

Exemplo

Para $U \subset X$ aberto, $h_U(T) = \{g: T \rightarrow X : g(T) \subset U\}$ é subfuntor de h_X : se $g(T) \subset U$, então $(g \circ f)(T') \subset U$.

Um subfuntor é uma **propriedade** que sobrevive a pullbacks.

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se para todo T e todo $\xi \in F(T)$ existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se para todo T e todo $\xi \in F(T)$ existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Testando com os morfismos $\text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$, vê-se que $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G$. Isso determina T_ξ como conjunto.

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se para todo T e todo $\xi \in F(T)$ existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Testando com os morfismos $\text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$, vê-se que $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G$. Isso determina T_ξ como conjunto.

T_ξ depende de dois dados

Da propriedade G e do elemento ξ . Com vários subfuntores em jogo, ambos entram na notação.

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se para todo T e todo $\xi \in F(T)$ existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Testando com os morfismos $\text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$, vê-se que $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G$. Isso determina T_ξ como conjunto.

T_ξ depende de dois dados

Da propriedade G e do elemento ξ . Com vários subfuntores em jogo, ambos entram na notação.

Para $F = h_X$, os subfuntores abertos são os h_U . Para $\underline{\text{Grass}}(V, d)$, é isto que os U_S precisam ser.

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

O dicionário para o resto da aula

$$I = \{S \subset \{1, \dots, n\} : |S| = d\}, \quad G_S = U_S, \quad T_{\xi, S} = T_{qE_S},$$

onde q representa ξ . Quando ξ estiver claro, abreviamos $T_S := T_{\xi, S}$.

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

O dicionário para o resto da aula

$$I = \{S \subset \{1, \dots, n\} : |S| = d\}, \quad G_S = U_S, \quad T_{\xi, S} = T_{qE_S},$$

onde q representa ξ . Quando ξ estiver claro, abreviamos $T_S := T_{\xi, S}$.

Duas quantificações a não perder de vista: o recobrimento tem de valer para **todo** T e **todo** elemento do funtor sobre ele, não apenas para $T = \text{Spec } k$.

As cartas em famílias

Definição

$$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

As cartas em famílias

Definição

$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$

É subfuntor

Boa definição: se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**, e compor com isomorfismo não altera a condição.

As cartas em famílias

Definição

$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$

É subfuntor

Boa definição: se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**, e compor com isomorfismo não altera a condição.

Estabilidade: $(f^*q)E_S = f^*(qE_S)$ por **(E2)**, e o pullback de um isomorfismo é isomorfismo.

As cartas em famílias

Definição

$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$

É subfuntor

Boa definição: se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**, e compor com isomorfismo não altera a condição.

Estabilidade: $(f^*q)E_S = f^*(qE_S)$ por **(E2)**, e o pullback de um isomorfismo é isomorfismo.

Para $T = \text{Spec } k$ isto é exatamente $\det M_S \neq 0$: recuperamos a definição da Aula 9a, agora válida sobre qualquer base.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante Φ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante Φ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre, o que dá a primeira afirmação.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante Φ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre, o que dá a primeira afirmação.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi E_S = \tau qE_S = \text{id}$.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante Φ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre, o que dá a primeira afirmação.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi E_S = \tau qE_S = \text{id}$.

Unicidade: dois representantes com alvo livre diferem por $\Phi' = g\Phi$, $g \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_T)$; pela equivariância,

$$I_d = \Phi' E_S = g \Phi E_S = g. \quad \square$$

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante Φ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre, o que dá a primeira afirmação.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi E_S = \tau qE_S = \text{id}$.

Unicidade: dois representantes com alvo livre diferem por $\Phi' = g\Phi$, $g \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_T)$; pela equivariância,

$$I_d = \Phi' E_S = g \Phi E_S = g. \quad \square$$

A normalização mata exatamente a liberdade de GL_d

quocientes módulo isomorfismo $\longrightarrow$ escolha da carta $S \longrightarrow \Phi E_S = I_d \longrightarrow$ representante

É a versão em famílias do fato da Aula 9a: a ação de GL_d nas matrizes de posto máximo é livre. Esta é a ponte entre as duas aulas.

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \cong \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N$, por $g \mapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N))$.

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \cong \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N$, por $g \mapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N))$.

Razão. $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$, e um homomorfismo a partir de $k[x_1, \dots, x_N]$ é livremente determinado pelas imagens dos x_i . $\square$

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \cong \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N$, por
 $g \mapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N))$.

Razão. $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$, e um homomorfismo a partir de $k[x_1, \dots, x_N]$ é livremente determinado pelas imagens dos x_i . $\square$

Com $N = d(n-d)$: um morfismo $T \rightarrow U_S$ é uma matriz A de seções globais. Falta ver que essas matrizes são exatamente os elementos de $U_S(T)$.

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

Teorema

Para todo T , a aplicação

$$\mathrm{Hom}(T, U_S) \longrightarrow U_S(T), \quad f \longmapsto [f^*q_S],$$

é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

Teorema

Para todo T , a aplicação

$$\mathrm{Hom}(T, U_S) \longrightarrow U_S(T), \quad f \longmapsto [f^*q_S],$$

é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. O pullback aplica $f^\#$ entrada a entrada, logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $f^*q_S E_S = I_d$: é sobrejetora, está em $U_S(T)$, e já normalizada.

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

Teorema

Para todo T , a aplicação

$$\mathrm{Hom}(T, U_S) \longrightarrow U_S(T), \quad f \longmapsto [f^*q_S],$$

é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. O pullback aplica $f^\#$ entrada a entrada, logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $f^*q_S E_S = I_d$: é sobrejetora, está em $U_S(T)$, e já normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

Teorema

Para todo T , a aplicação

$$\mathrm{Hom}(T, U_S) \longrightarrow U_S(T), \quad f \longmapsto [f^*q_S],$$

é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. O pullback aplica $f^\#$ entrada a entrada, logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $f^*q_S E_S = I_d$: é sobrejetora, está em $U_S(T)$, e já normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

Sobrejetora. Dado $[q] \in U_S(T)$ com normalizada $\Phi = [I_d \mid A_0]$, a matriz A_0 define $f: T \rightarrow \mathbb{A}^N$ com $f^\#(A) = A_0$, e então $f^*q_S = \Phi$. $\square$

A carta representa U_S

Escreva $N := d(n - d)$, de modo que $U_S = \mathbb{A}^N$ tem coordenadas $A = (a_{ij})$.

Teorema

Para todo T , a aplicação

$$\mathrm{Hom}(T, U_S) \longrightarrow U_S(T), \quad f \longmapsto [f^*q_S],$$

é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. O pullback aplica $f^\#$ entrada a entrada, logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $f^*q_S E_S = I_d$: é sobrejetora, está em $U_S(T)$, e já normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

Sobrejetora. Dado $[q] \in U_S(T)$ com normalizada $\Phi = [I_d \mid A_0]$, a matriz A_0 define $f: T \rightarrow \mathbb{A}^N$ com $f^\#(A) = A_0$, e então $f^*q_S = \Phi$. $\square$

Corolário

A bijeção é natural em T , pois $(g \circ f)^* = f^*g^*$. Logo $U_S \cong h_{\mathbb{A}^N}$: o espaço afim $\mathbb{A}^{d(n-d)}$ **representa** U_S , com elemento universal $[q_S]$. Recobrir T pelos T_S e colar essas bijeções será a prova geral.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

Passo 1: localizar

Num aberto W onde Q é livre, $u|_W$ é uma matriz quadrada M sobre $\mathcal{O}(W)$. Trocar a trivialização troca M por gM , o que multiplica $\det M$ por uma unidade.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

Passo 1: localizar

Num aberto W onde Q é livre, $u|_W$ é uma matriz quadrada M sobre $\mathcal{O}(W)$. Trocar a trivialização troca M por gM , o que multiplica $\det M$ por uma unidade.

Passo 2: a condição pontual

$u \otimes \kappa(t)$ é a matriz $M(t)$ sobre $\kappa(t)$, logo $T_u \cap W = \{\det M(t) \neq 0\}$, que é aberto.

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível. De

$$M \cdot \operatorname{adj}(M) = \operatorname{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \operatorname{adj}(M)$: assim u é isomorfismo sobre T_u .

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível. De

$$M \cdot \operatorname{adj}(M) = \operatorname{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \operatorname{adj}(M)$: assim u é isomorfismo sobre T_u .

Passo 4: pullback

A matriz de f^*u é $f^\#(M)$, e $\det f^\#(M) = f^\#(\det M)$. A fibra em t' é $M(t)$, com $t = f(t')$, vista via o morfismo induzido nos corpos residuais $\kappa(f(t')) \hookrightarrow \kappa(t')$, que é injetor por ser homomorfismo de corpos. Logo $\det M(t) \neq 0$ se e só se a sua imagem é não nula, isto é, $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$. □

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível. De

$$M \cdot \text{adj}(M) = \text{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \text{adj}(M)$: assim u é isomorfismo sobre T_u .

Passo 4: pullback

A matriz de f^*u é $f^\#(M)$, e $\det f^\#(M) = f^\#(\det M)$. A fibra em t' é $M(t)$, com $t = f(t')$, vista via o morfismo induzido nos corpos residuais $\kappa(f(t')) \hookrightarrow \kappa(t')$, que é injetor por ser homomorfismo de corpos. Logo $\det M(t) \neq 0$ se e só se a sua imagem é não nula, isto é, $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$. □

As cartas são abertas

Com $u = qE_S$ e **(E2)**: $f^*\xi \in U_S(T') \iff f(T') \subset T_{qE_S} = T_S$, que é a definição de subfuntor aberto.

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$.

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes$ é exato à direita, e o alvo tem dimensão d .

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes$ é exato à direita, e o alvo tem dimensão d . Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base com d elementos.

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes$ é exato à direita, e o alvo tem dimensão d . Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base com d elementos.

Seja S o conjunto dos d índices extraídos: as colunas de $\bar{q}$ indexadas por S formam base, isto é, $t \in T_S$. □

As cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_S = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes$ é exato à direita, e o alvo tem dimensão d . Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base com d elementos.

Seja S o conjunto dos d índices extraídos: as colunas de $\bar{q}$ indexadas por S formam base, isto é, $t \in T_S$. □

Versão em famílias da observação da Aula 9a: nenhum S serve para todos os pontos, mas cada ponto admite algum.

O critério de representabilidade de Zariski

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ um funtor, como $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

O critério de representabilidade de Zariski

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ um funtor, como $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Definição

F é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

O critério de representabilidade de Zariski

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ um funtor, como $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Definição

F é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

$\underline{\text{Grass}}(V, d)$ é feixe de Zariski

- (S) a relação do funtor é por núcleos, e núcleos são subfeixes, logo determinados localmente. (C) feixes, morfismos e sobrejeções colam.

O critério de representabilidade de Zariski

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ um funtor, como $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Definição

F é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

$\underline{\text{Grass}}(V, d)$ é feixe de Zariski

(S) a relação do funtor é por núcleos, e núcleos são subfeixes, logo determinados localmente. (C) feixes, morfismos e sobrejeções colam.

Teorema (Critério)

Se F é feixe de Zariski e admite uma família de subfuntores abertos que o recobre, cada um representável, então F é representável, pelo esquema colado a partir das peças.

O teorema de representabilidade

Teorema

Para todo k -esquema T , a aplicação

$$\eta_T: \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Grass}(V, d)) \longrightarrow \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)(T), \quad f \longmapsto [f^* q_{\operatorname{univ}}],$$

é bijetora. Isto é, $(\operatorname{Grass}(V, d), q_{\operatorname{univ}})$ representa o funtor de Grassmann.

O teorema de representabilidade

Teorema

Para todo k -esquema T , a aplicação

$$\eta_T: \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Grass}(V, d)) \longrightarrow \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)(T), \quad f \longmapsto [f^* q_{\operatorname{univ}}],$$

é bijetora. Isto é, $(\operatorname{Grass}(V, d), q_{\operatorname{univ}})$ representa o funtor de Grassmann.

O que a prova vai usar

- as cartas em famílias e a unicidade da forma normalizada;
- o teorema da carta, $\operatorname{Hom}(T, U_S) \cong U_S(T)$;
- o lugar de isomorfismo e o recobrimento $\{T_S\}$;
- o axioma (S) do feixe de Zariski, duas vezes.

Sobrejetividade

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$.

Sobrejetividade

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$.

Passo 1: os abertos

$T_S = T_{qE_S}$ é aberto, e os T_S recobrem T .

Sobrejetividade

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$.

Passo 1: os abertos

$T_S = T_{qE_S}$ é aberto, e os T_S recobrem T .

Passo 2: o morfismo em cada carta

Sobre T_S a forma normalizada é $\Phi = [I_d \mid A]$, com $A \in \Gamma(T_S, \mathcal{O})^N$; essa matriz é um morfismo $f_S: T_S \rightarrow \mathbb{A}^N = U_S \subset \text{Grass}(V, d)$.

Sobrejetividade

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$.

Passo 1: os abertos

$T_S = T_{qE_S}$ é aberto, e os T_S recobrem T .

Passo 2: o morfismo em cada carta

Sobre T_S a forma normalizada é $\Phi = [I_d \mid A]$, com $A \in \Gamma(T_S, \mathcal{O})^N$; essa matriz é um morfismo $f_S: T_S \rightarrow \mathbb{A}^N = U_S \subset \text{Grass}(V, d)$.

Passo 3: ele resolve o problema em T_S

Pelo teorema da carta, $f_S^* q_S = \Phi$, isto é, $\eta_{T_S}(f_S) = [q|_{T_S}]$.

Sobrejetividade

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$.

Passo 1: os abertos

$T_S = T_{qE_S}$ é aberto, e os T_S recobrem T .

Passo 2: o morfismo em cada carta

Sobre T_S a forma normalizada é $\Phi = [I_d \mid A]$, com $A \in \Gamma(T_S, \mathcal{O})^N$; essa matriz é um morfismo $f_S: T_S \rightarrow \mathbb{A}^N = U_S \subset \text{Grass}(V, d)$.

Passo 3: ele resolve o problema em T_S

Pelo teorema da carta, $f_S^* q_S = \Phi$, isto é, $\eta_{T_S}(f_S) = [q|_{T_S}]$.

É a razão do nome tautológico: especializar a matriz genérica devolve o próprio ponto.

Sobrejetividade: a colagem

Passo 4: os f_S coincidem nas sobreposições

Como $U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'})$ e $f_S^* q_S = \Phi$,

$$f_S^{-1}(U_{S'}) = \{ \det(\Phi E_{S'}) \neq 0 \} = T_S \cap T_{S'}.$$

Sobrejetividade: a colagem

Passo 4: os f_S coincidem nas sobreposições

Como $U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'})$ e $f_S^* q_S = \Phi$,

$$f_S^{-1}(U_{S'}) = \{ \det(\Phi E_{S'}) \neq 0 \} = T_S \cap T_{S'}.$$

Sobre $T_S \cap T_{S'}$, tanto f_S quanto $f_{S'}$ são morfismos para $U_{S'}$ cuja matriz normalizada na carta S' é a normalizada de q , que é única. Pela bijeção $\text{Hom}(-, U_{S'}) \cong \{\text{matrizes normalizadas}\}$, tem-se $f_S = f_{S'}$.

Sobrejetividade: a colagem

Passo 4: os f_S coincidem nas sobreposições

Como $U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'})$ e $f_S^* q_S = \Phi$,

$$f_S^{-1}(U_{S'}) = \{ \det(\Phi E_{S'}) \neq 0 \} = T_S \cap T_{S'}.$$

Sobre $T_S \cap T_{S'}$, tanto f_S quanto $f_{S'}$ são morfismos para $U_{S'}$ cuja matriz normalizada na carta S' é a normalizada de q , que é única. Pela bijeção $\text{Hom}(-, U_{S'}) \cong \{\text{matrizes normalizadas}\}$, tem-se $f_S = f_{S'}$.

Passo 5: colar

Os f_S colam num morfismo $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$. A igualdade $\eta_T(f) = [q]$ vale sobre cada T_S , logo vale sobre T , pela separação (S). □

Sobrejetividade: a colagem

Passo 4: os f_S coincidem nas sobreposições

Como $U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'})$ e $f_S^* q_S = \Phi$,

$$f_S^{-1}(U_{S'}) = \{ \det(\Phi E_{S'}) \neq 0 \} = T_S \cap T_{S'}.$$

Sobre $T_S \cap T_{S'}$, tanto f_S quanto $f_{S'}$ são morfismos para $U_{S'}$ cuja matriz normalizada na carta S' é a normalizada de q , que é única. Pela bijeção $\text{Hom}(-, U_{S'}) \cong \{\text{matrizes normalizadas}\}$, tem-se $f_S = f_{S'}$.

Passo 5: colar

Os f_S colam num morfismo $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$. A igualdade $\eta_T(f) = [q]$ vale sobre cada T_S , logo vale sobre T , pela separação (S). $\square$

Note que a unicidade da forma normalizada foi usada duas vezes: para definir f_S e para colar.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: [q]$.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: [q]$.

Passo 1: as pré-imagens das cartas coincidem

Pelo lugar de isomorfismo aplicado a $q_{\text{univ}}E_S$, e como $f^*(q_{\text{univ}}E_S) = qE_S$, tem-se $f^{-1}(U_S) = T_{qE_S} = T_S = g^{-1}(U_S)$.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: [q]$.

Passo 1: as pré-imagens das cartas coincidem

Pelo lugar de isomorfismo aplicado a $q_{\text{univ}}E_S$, e como $f^*(q_{\text{univ}}E_S) = qE_S$, tem-se $f^{-1}(U_S) = T_{qE_S} = T_S = g^{-1}(U_S)$.

Passo 2: em cada carta

Sobre T_S , ambos são morfismos para U_S , e a matriz normalizada de cada um é a normalizada de q , que é única. Logo $f|_{T_S} = g|_{T_S}$.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: [q]$.

Passo 1: as pré-imagens das cartas coincidem

Pelo lugar de isomorfismo aplicado a $q_{\text{univ}}E_S$, e como $f^*(q_{\text{univ}}E_S) = qE_S$, tem-se $f^{-1}(U_S) = T_{qE_S} = T_S = g^{-1}(U_S)$.

Passo 2: em cada carta

Sobre T_S , ambos são morfismos para U_S , e a matriz normalizada de cada um é a normalizada de q , que é única. Logo $f|_{T_S} = g|_{T_S}$.

Passo 3: colar

Os T_S recobrem T , e morfismos que coincidem num recobrimento aberto são iguais. □

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: [q]$.

Passo 1: as pré-imagens das cartas coincidem

Pelo lugar de isomorfismo aplicado a $q_{\text{univ}}E_S$, e como $f^*(q_{\text{univ}}E_S) = qE_S$, tem-se $f^{-1}(U_S) = T_{qE_S} = T_S = g^{-1}(U_S)$.

Passo 2: em cada carta

Sobre T_S , ambos são morfismos para U_S , e a matriz normalizada de cada um é a normalizada de q , que é única. Logo $f|_{T_S} = g|_{T_S}$.

Passo 3: colar

Os T_S recobrem T , e morfismos que coincidem num recobrimento aberto são iguais. □

Lacuna 2 fechada: $\text{Grass}(V, d)$ é um espaço de módulos fino, com objeto universal q_{univ} .

Síntese

- 1 Os candidatos q_S comparam-se nas sobreposições por um único isomorfismo do alvo, a multiplicação por $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$.

Síntese

- ① Os candidatos q_S comparam-se nas sobreposições por um único isomorfismo do alvo, a multiplicação por $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$.
- ② A identidade $M'_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''}$, que na Aula 9a colou o **esquema**, é o cociclo que agora cola o **feixe**: existe q_{univ} , com trivializações canônicas $\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$.

Síntese

- 1 Os candidatos q_S comparam-se nas sobreposições por um único isomorfismo do alvo, a multiplicação por $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$.
- 2 A identidade $M'_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''}$, que na Aula 9a colou o **esquema**, é o cociclo que agora cola o **feixe**: existe q_{univ} , com trivializações canônicas $\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$.
- 3 As cartas U_S são subfuntores abertos, representáveis, e recobrem o funtor.

Síntese

- ① Os candidatos q_S comparam-se nas sobreposições por um único isomorfismo do alvo, a multiplicação por $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$.
- ② A identidade $M'_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''}$, que na Aula 9a colou o **esquema**, é o cociclo que agora cola o **feixe**: existe q_{univ} , com trivializações canônicas $\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$.
- ③ As cartas U_S são subfuntores abertos, representáveis, e recobrem o funtor.
- ④ Recobrir, resolver em cada carta e colar prova que η_T é bijetora: $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Síntese

- ① Os candidatos q_S comparam-se nas sobreposições por um único isomorfismo do alvo, a multiplicação por $g_{S'S} = M_{S'}^{-1}$.
- ② A identidade $M'_{S''} = M_{S'}^{-1} M_{S''}$, que na Aula 9a colou o **esquema**, é o cociclo que agora cola o **feixe**: existe q_{univ} , com trivializações canônicas $\tau_S = (q_{\text{univ}} E_S)^{-1}$.
- ③ As cartas U_S são subfuntores abertos, representáveis, e recobrem o funtor.
- ④ Recobrir, resolver em cada carta e colar prova que η_T é bijetora: $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Aula seguinte

det Q_{univ} , as coordenadas de Plücker e o mergulho de $\text{Grass}(V, d)$ num espaço projetivo.