

A representabilidade

Charles Almeida (UFMG)

Fundamentos de Espaços de Móduli em Geometria Algébrica

Aula 12

A representabilidade.

- 1 Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .

A representabilidade.

- ① Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .
- ② A linguagem: subfuntores abertos, recobrimentos, feixes de Zariski.

A representabilidade.

- ① Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .
- ② A linguagem: subfuntores abertos, recobrimentos, feixes de Zariski.
- ③ O lema de colagem: um critério geral para η ser bijetora.

A representabilidade.

- 1 Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .
- 2 A linguagem: subfuntores abertos, recobrimentos, feixes de Zariski.
- 3 O lema de colagem: um critério geral para η ser bijetora.
- 4 Verificação das hipóteses do lema para a Grassmanniana.

A representabilidade.

- 1 Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .
- 2 A linguagem: subfuntores abertos, recobrimentos, feixes de Zariski.
- 3 O lema de colagem: um critério geral para η ser bijetora.
- 4 Verificação das hipóteses do lema para a Grassmanniana.
- 5 Conclusão e o caso $d = 1$: morfismos para o espaço projetivo.

A representabilidade.

- 1 Onde estamos: o par $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ e a transformação η .
- 2 A linguagem: subfuntores abertos, recobrimentos, feixes de Zariski.
- 3 O lema de colagem: um critério geral para η ser bijetora.
- 4 Verificação das hipóteses do lema para a Grassmanniana.
- 5 Conclusão e o caso $d = 1$: morfismos para o espaço projetivo.

Uma só linha de prova

Não vamos provar a bijetividade de η “na mão” e depois invocar um critério abstrato. Vamos provar o critério **uma vez**, em geral, e em seguida verificar as suas hipóteses **uma a uma**. Toda a álgebra linear em famílias fica concentrada na Parte 4.

Resumo: o funtor de Grassmann

Definição (Aulas 10 e 11)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback, $[q] \mapsto [f^*q]$.

Recapitulação: o funtor de Grassmann

Definição (Aulas 10 e 11)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback, $[q] \mapsto [f^*q]$.

A relação $\sim$, dita de outro modo

$q \sim q'$ se e só se existe um isomorfismo $\theta: Q \rightarrow Q'$ com $q' = \theta q$. De fato, se $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$, então Q e Q' são ambos o cociente de $V \otimes \mathcal{O}_T$ pelo mesmo subfeixe, e θ é o isomorfismo induzido. Reciprocamente, se θ é isomorfismo, então $\text{Ker } (\theta q) = \text{Ker } q$.

Resumo: o funtor de Grassmann

Definição (Aulas 10 e 11)

Para cada k -esquema T ,

$$\underline{\text{Grass}}(V, d)(T) = \{ q: V \otimes_k \mathcal{O}_T \twoheadrightarrow Q \mid Q \text{ loc. livre de posto } d \} / \sim,$$

onde $q \sim q' \iff \text{Ker } q = \text{Ker } q'$, e $f: T' \rightarrow T$ age por pullback, $[q] \mapsto [f^*q]$.

A relação $\sim$, dita de outro modo

$q \sim q'$ se e só se existe um isomorfismo $\theta: Q \rightarrow Q'$ com $q' = \theta q$. De fato, se $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$, então Q e Q' são ambos o cociente de $V \otimes \mathcal{O}_T$ pelo mesmo subfeixe, e θ é o isomorfismo induzido. Reciprocamente, se θ é isomorfismo, então $\text{Ker } (\theta q) = \text{Ker } q$.

Dois pontos a reter

O alvo Q **não é fixado**: faz parte do dado, e exige-se apenas que seja localmente livre. E T é **arbitrário**: nada impede tomar $T = \text{Grass}(V, d)$.

Convenções: as colunas indexadas por S

Fixe $V = k^n$ com base $e_1, \dots, e_n$. Para $S = \{s_1 < \dots < s_d\} \subset \{1, \dots, n\}$,

$$E_S: \mathcal{O}_T^d \longrightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T, \quad \varepsilon_i \longmapsto e_{s_i} \otimes 1.$$

Para $q: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow Q$ escrevemos $qE_S := q \circ E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$.

Convenções: as colunas indexadas por S

Fixe $V = k^n$ com base $e_1, \dots, e_n$. Para $S = \{s_1 < \dots < s_d\} \subset \{1, \dots, n\}$,

$$E_S: \mathcal{O}_T^d \longrightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T, \quad \varepsilon_i \longmapsto e_{s_i} \otimes 1.$$

Para $q: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow Q$ escrevemos $qE_S := q \circ E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$.

Sobre $T = \operatorname{Spec} k$

q é uma matriz M , $d \times n$, de posto d , e $qE_S = M_S$ é a submatriz $d \times d$ das colunas indexadas por S .

Convenções: as colunas indexadas por S

Fixe $V = k^n$ com base $e_1, \dots, e_n$. Para $S = \{s_1 < \dots < s_d\} \subset \{1, \dots, n\}$,

$$E_S: \mathcal{O}_T^d \longrightarrow V \otimes_k \mathcal{O}_T, \quad \varepsilon_i \longmapsto e_{s_i} \otimes 1.$$

Para $q: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow Q$ escrevemos $qE_S := q \circ E_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$.

Sobre $T = \text{Spec } k$

q é uma matriz M , $d \times n$, de posto d , e $qE_S = M_S$ é a submatriz $d \times d$ das colunas indexadas por S .

Duas identidades usadas em toda a aula

- (E1) $(\theta q)E_S = \theta(qE_S)$: é a associatividade da composição.
- (E2) $(f^* q)E_S = f^*(qE_S)$: f^* preserva composições e $f^* E_S = E_S$, pois E_S é dada por uma matriz de constantes 0 e 1, e $f^\#$ fixa as constantes.

Recapitulação: o esquema e o quociente universal (Aula 11)

Escreva $N := d(n - d)$.

As cartas

$U_S := \mathbb{A}^N = \operatorname{Spec} k[a_{ij}]$, com o quociente tautológico $q_S: \mathcal{O}_{U_S}^n \rightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d$ dado pela matriz M^S cujas colunas indexadas por S formam I_d e as restantes formam $A = (a_{ij})$. Abreviamos $q_S = [I_d \mid A]$.

Recapitulação: o esquema e o quociente universal (Aula 11)

Escreva $N := d(n - d)$.

As cartas

$U_S := \mathbb{A}^N = \operatorname{Spec} k[a_{ij}]$, com o quociente tautológico $q_S: \mathcal{O}_{U_S}^n \rightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d$ dado pela matriz M^S cujas colunas indexadas por S formam I_d e as restantes formam $A = (a_{ij})$. Abreviamos $q_S = [I_d \mid A]$.

A colagem

$U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'}^S) \subset U_S$, e $\operatorname{Grass}(V, d) = \bigcup_{|S|=d} U_S$. Os q_S colam num quociente global

$$q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\operatorname{Grass}(V, d)} \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{univ}}, \quad q_{\text{univ}}|_{U_S} \sim q_S \text{ para todo } S.$$

Rescapitulação: o esquema e o quociente universal (Aula 11)

Escreva $N := d(n - d)$.

As cartas

$U_S := \mathbb{A}^N = \text{Spec } k[a_{ij}]$, com o quociente tautológico $q_S: \mathcal{O}_{U_S}^n \rightarrow \mathcal{O}_{U_S}^d$ dado pela matriz M^S cujas colunas indexadas por S formam I_d e as restantes formam $A = (a_{ij})$. Abreviamos $q_S = [I_d \mid A]$.

A colagem

$U_S \cap U_{S'} = D(\det M_{S'}^S) \subset U_S$, e $\text{Grass}(V, d) = \bigcup_{|S|=d} U_S$. Os q_S colam num quociente global

$$q_{\text{univ}}: V \otimes_k \mathcal{O}_{\text{Grass}(V, d)} \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{univ}}, \quad q_{\text{univ}}|_{U_S} \sim q_S \text{ para todo } S.$$

Consequência pontual (será usada na Parte 4)

Para $t \in \text{Grass}(V, d)$ e S' com $t \in U_{S'}$:

$t \in U_S \iff \det M_{S'}^S(t) \neq 0 \iff$ as colunas S de $q_{\text{univ}} \otimes \kappa(t)$ formam base, pois sobre $U_{S'}$ tem-se $q_{\text{univ}} \sim q_{S'} = M^{S'}$, e compor com um isomorfismo do alvo não altera se um conjunto de colunas é base.

O que temos e o que falta

Temos um par

$$(\mathrm{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\mathrm{univ}}] \in \underline{\mathrm{Grass}}(V, d)(\mathrm{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\mathrm{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\mathrm{univ}}].$$

O que temos e o que falta

Temos um par

$$(\text{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\text{univ}}] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(\text{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\text{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\text{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\text{univ}}].$$

Está bem definida e é natural

f^* é exato à direita, logo preserva sobrejeções, e preserva módulos localmente livres de posto d . A naturalidade é $(g \circ f)^* = f^* g^*$.

O que temos e o que falta

Temos um par

$$(\mathrm{Grass}(V, d), \xi), \quad \xi = [q_{\mathrm{univ}}] \in \underline{\mathrm{Grass}}(V, d)(\mathrm{Grass}(V, d)),$$

e portanto, pelo lema de Yoneda, uma transformação natural

$$\eta: h_{\mathrm{Grass}(V, d)} \longrightarrow \underline{\mathrm{Grass}}(V, d), \quad \eta_T(f) := [f^* q_{\mathrm{univ}}].$$

Está bem definida e é natural

f^* é exato à direita, logo preserva sobrejeções, e preserva módulos localmente livres de posto d . A naturalidade é $(g \circ f)^* = f^* g^*$.

Lacuna 2

Representar o funtor significa: η_T é **bijetora** para todo T . É o único enunciado que falta provar.

A estratégia

A ideia

Dado $[q]$ sobre T , **recobrimos** T pelos abertos onde q “cai na carta S ”, **resolvemos** o problema em cada um desses abertos, onde ele é álgebra linear sobre um anel, e **colamos** as soluções.

A estratégia

A ideia

Dado $[q]$ sobre T , **recobrimos** T pelos abertos onde q “cai na carta S ”, **resolvemos** o problema em cada um desses abertos, onde ele é álgebra linear sobre um anel, e **colamos** as soluções.

Como organizar isso

Esse argumento não depende de nada específico da Grassmanniana além de cinco propriedades. Vamos isolá-lo num **lema de colagem** geral (Parte 3) e depois verificar as cinco propriedades para $\underline{\text{Grass}}(V, d)$ (Parte 4).

A estratégia

A ideia

Dado $[q]$ sobre T , **recobrimos** T pelos abertos onde q “cai na carta S ”, **resolvemos** o problema em cada um desses abertos, onde ele é álgebra linear sobre um anel, e **colamos** as soluções.

Como organizar isso

Esse argumento não depende de nada específico da Grassmanniana além de cinco propriedades. Vamos isolá-lo num **lema de colagem** geral (Parte 3) e depois verificar as cinco propriedades para $\underline{\text{Grass}}(V, d)$ (Parte 4).

no lema geral	na Grassmanniana
funtor F	$\underline{\text{Grass}}(V, d)$
esquema X , elemento $\xi \in F(X)$	$\text{Grass}(V, d)$, $[q_{\text{univ}}]$
abertos $X_\alpha \subset X$	cartas $U_S = \mathbb{A}^N$
subfuntores $G_\alpha \subset F$	$U_S(T) := \{[q] : qE_S \text{ isomorfismo}\}$

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

Subfuntor

Definição

Seja $F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$. Um **subfuntor** $G \subset F$ é o dado, para cada T , de um subconjunto $G(T) \subset F(T)$ sujeito à **estabilidade por pullback**:

$$F(f)(G(T)) \subset G(T') \quad \text{para todo } f: T' \rightarrow T.$$

O que a condição garante

Ela é exatamente o necessário para que G seja um funtor, com $G(f)$ a restrição de $F(f)$. As inclusões $G(T) \subset F(T)$ formam uma transformação natural $G \rightarrow F$ com componentes injetoras.

Exemplo

Seja $U \subset X$ aberto. Ponha

$$G(T) := \{ g \in \text{Hom}(T, X) : g(T) \subset U \} \subset h_X(T).$$

G é subfuntor de h_X : se $g \in G(T)$ e $f: T' \rightarrow T$, então para cada $t' \in T'$ tem-se $(g \circ f)(t') = g(f(t')) \in g(T) \subset U$; logo

$h_X(f)(g) = g \circ f \in G(T')$. G é representável, por U : se $g(T) \subset U$, então $g^{-1}(U) = T$ e g fatora de modo único como $g = j \circ \tilde{g}$ com $\tilde{g}: T \rightarrow U$ e $j: U \hookrightarrow X$ a imersão aberta. A aplicação $\text{Hom}(T, U) \rightarrow G(T)$, $\tilde{g} \mapsto j \circ \tilde{g}$, é portanto bijetora, e é natural em T . Isto é, $G \cong h_U$.

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se, para todo T e todo $\xi \in F(T)$, existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se, para todo T e todo $\xi \in F(T)$, existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Para um ponto $t \in T$, aplique a condição a $f: \text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$: a imagem é $\{t\}$, logo $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G(\text{Spec } \kappa(t))$. Isso determina T_ξ como conjunto, a partir de G e de ξ .

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se, para todo T e todo $\xi \in F(T)$, existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Para um ponto $t \in T$, aplique a condição a $f: \text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$: a imagem é $\{t\}$, logo $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G(\text{Spec } \kappa(t))$. Isso determina T_ξ como conjunto, a partir de G e de ξ .

Duas consequências imediatas

Com f a inclusão de um aberto $W \subset T$: $\xi|_W \in G(W) \iff W \subset T_\xi$. Em particular $\xi|_{T_\xi} \in G(T_\xi)$, e $\xi \in G(T) \iff T_\xi = T$.

Subfuntor aberto

Definição

$G \subset F$ é **aberto** se, para todo T e todo $\xi \in F(T)$, existe um aberto $T_\xi \subset T$ tal que, para todo $f: T' \rightarrow T$,

$$F(f)(\xi) \in G(T') \iff f(T') \subset T_\xi.$$

Unicidade de T_ξ

Para um ponto $t \in T$, aplique a condição a $f: \text{Spec } \kappa(t) \rightarrow T$: a imagem é $\{t\}$, logo $t \in T_\xi \iff \xi|_{\text{Spec } \kappa(t)} \in G(\text{Spec } \kappa(t))$. Isso determina T_ξ como conjunto, a partir de G e de ξ .

Duas consequências imediatas

Com f a inclusão de um aberto $W \subset T$: $\xi|_W \in G(W) \iff W \subset T_\xi$. Em particular $\xi|_{T_\xi} \in G(T_\xi)$, e $\xi \in G(T) \iff T_\xi = T$.

Para $F = h_X$, os subfuntores abertos são exatamente os h_U : dado $G \subset h_X$ aberto, tome $\xi = \text{id}_X$ e $U := X_{\text{id}_X}$; então $f \in G(T) \iff f(T) \subset U$.

Subfuntor aberto

De onde vem a definição

$F(T')$ é só um conjunto, sem topologia: não faz sentido pedir que $G(T) \subset F(T)$ seja aberto. Quem tem topologia é T . Fixe então $\xi \in F(T)$ e considere o *lugar onde* ξ *satisfaz* G :

$$G_{\xi}(T') := \{f: T' \rightarrow T : F(f)(\xi) \in G(T')\} \subset h_T(T').$$

É subfuntor de h_T , pois $F(f \circ g)(\xi) = F(g)(F(f)(\xi))$ e G é estável por pullback.

Subfuntor aberto

De onde vem a definição

$F(T')$ é só um conjunto, sem topologia: não faz sentido pedir que $G(T) \subset F(T)$ seja aberto. Quem tem topologia é T . Fixe então $\xi \in F(T)$ e considere o *lugar onde ξ satisfaz G* :

$$G_\xi(T') := \{f: T' \rightarrow T : F(f)(\xi) \in G(T')\} \subset h_T(T').$$

É subfuntor de h_T , pois $F(f \circ g)(\xi) = F(g)(F(f)(\xi))$ e G é estável por pullback. Dizer que G é **aberto** é dizer que G_ξ é representável por um aberto $T_\xi \subset T$, para todo par (T, ξ) . Como $h_{T_\xi}(T') = \{f: f(T') \subset T_\xi\}$, isso é precisamente a definição abaixo.

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

Leitura

Cada elemento ξ de F , sobre qualquer base T , cai localmente em algum G_α : perto de cada ponto de T alguma das propriedades G_α vale para ξ .

Recobrimento de um funtor

Definição

Seja $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ uma família de subfuntores abertos de F , e seja $T_{\xi, \alpha} \subset T$ o aberto associado a G_α e a ξ . A família **recobre** F se

$$\bigcup_{\alpha \in I} T_{\xi, \alpha} = T \quad \text{para todo } T \text{ e todo } \xi \in F(T).$$

Leitura

Cada elemento ξ de F , sobre qualquer base T , cai localmente em algum G_α : perto de cada ponto de T alguma das propriedades G_α vale para ξ .

Duas quantificações a não perder de vista: o recobrimento tem de valer para **todo** T e **todo** elemento do funtor sobre ele, não apenas para $T = \text{Spec } k$.

Feixe de Zariski

Definição

$F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

Feixe de Zariski

Definição

$F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

Exemplo

h_X é feixe de Zariski: morfismos de esquemas que coincidem num recobrimento aberto são iguais, e morfismos compatíveis nas interseções colam.

Feixe de Zariski

Definição

$F: \text{Sch}_k^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$ é um **feixe de Zariski** se, para todo T e todo recobrimento aberto $T = \bigcup_i W_i$:

- (S) dois elementos de $F(T)$ cujas restrições a cada W_i coincidem são iguais;
- (C) elementos $\xi_i \in F(W_i)$ cujas restrições a $W_i \cap W_j$ coincidem provêm de um $\xi \in F(T)$.

Exemplo

h_X é feixe de Zariski: morfismos de esquemas que coincidem num recobrimento aberto são iguais, e morfismos compatíveis nas interseções colam.

Duas versões do critério de Zariski

Existência: F feixe de Zariski recoberto por subfuntores abertos representáveis é representável. Aí (C) é essencial, pois é preciso **construir** o esquema e o elemento universal a partir das peças.

Verificação: X e ξ já existem, e pergunta-se se η é bijetora. Aí só (S) é usado. É a versão que precisamos: a Aula 11 já construiu $\text{Grass}(V, d)$ e q_{univ} .

O lema de colagem

Teorema (Lema de colagem)

Sejam F um feixe de Zariski, X um k -esquema, $\xi \in F(X)$ e $\eta: h_X \rightarrow F$, $\eta_T(f) = F(f)(\xi)$. Suponha dados um recobrimento aberto $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ e subfuntores abertos $G_{\alpha} \subset F$ tais que:

- (a) a família $\{G_{\alpha}\}$ recobre F ;
- (b) para todo T e todo $f: T \rightarrow X$: $\eta_T(f) \in G_{\alpha}(T) \iff f(T) \subset X_{\alpha}$;
- (c) para todo T , a aplicação induzida $\text{Hom}(T, X_{\alpha}) \rightarrow G_{\alpha}(T)$, $f \mapsto \eta_T(f)$, é bijetora.

Então η_T é bijetora para todo T . Isto é, (X, ξ) representa F .

O lema de colagem

Teorema (Lema de colagem)

Sejam F um feixe de Zariski, X um k -esquema, $\xi \in F(X)$ e $\eta: h_X \rightarrow F$, $\eta_T(f) = F(f)(\xi)$. Suponha dados um recobrimento aberto $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ e subfuntores abertos $G_{\alpha} \subset F$ tais que:

- (a) a família $\{G_{\alpha}\}$ recobre F ;
- (b) para todo T e todo $f: T \rightarrow X$: $\eta_T(f) \in G_{\alpha}(T) \iff f(T) \subset X_{\alpha}$;
- (c) para todo T , a aplicação induzida $\text{Hom}(T, X_{\alpha}) \rightarrow G_{\alpha}(T)$, $f \mapsto \eta_T(f)$, é bijetora.

Então η_T é bijetora para todo T . Isto é, (X, ξ) representa F .

Sobre a hipótese (c)

Por (b), se $f: T \rightarrow X$ tem imagem em X_{α} então $\eta_T(f) \in G_{\alpha}(T)$; logo η restringe-se a uma transformação $h_{X_{\alpha}} \rightarrow G_{\alpha}$. A hipótese (c) pede que essa restrição seja isomorfismo: as peças X_{α} **representam** as peças G_{α} .

O lema de colagem

Teorema (Lema de colagem)

Sejam F um feixe de Zariski, X um k -esquema, $\xi \in F(X)$ e $\eta: h_X \rightarrow F$, $\eta_T(f) = F(f)(\xi)$. Suponha dados um recobrimento aberto $X = \bigcup_{\alpha} X_{\alpha}$ e subfuntores abertos $G_{\alpha} \subset F$ tais que:

- (a) a família $\{G_{\alpha}\}$ recobre F ;
- (b) para todo T e todo $f: T \rightarrow X$: $\eta_T(f) \in G_{\alpha}(T) \iff f(T) \subset X_{\alpha}$;
- (c) para todo T , a aplicação induzida $\text{Hom}(T, X_{\alpha}) \rightarrow G_{\alpha}(T)$, $f \mapsto \eta_T(f)$, é bijetora.

Então η_T é bijetora para todo T . Isto é, (X, ξ) representa F .

Sobre a hipótese (c)

Por (b), se $f: T \rightarrow X$ tem imagem em X_{α} então $\eta_T(f) \in G_{\alpha}(T)$; logo η restringe-se a uma transformação $h_{X_{\alpha}} \rightarrow G_{\alpha}$. A hipótese (c) pede que essa restrição seja isomorfismo: as peças X_{α} **representam** as peças G_{α} .

A prova só usa o axioma (S) de feixe, uma vez, no último passo.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: \zeta$, e seja $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ o aberto de G_α associado a ζ .

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: \zeta$, e seja $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ o aberto de G_α associado a ζ .

Passo 1: $f^{-1}(X_\alpha) = T_\alpha = g^{-1}(X_\alpha)$

Seja $W \subset T$ aberto. Por naturalidade, $\eta_W(f|_W) = \zeta|_W$. Então

$$f(W) \subset X_\alpha \stackrel{(b)}{\iff} \zeta|_W \in G_\alpha(W) \stackrel{\text{aberto}}{\iff} W \subset T_\alpha.$$

Com $W = f^{-1}(X_\alpha)$ obtém-se $f^{-1}(X_\alpha) \subset T_\alpha$; com $W = T_\alpha$ obtém-se $f(T_\alpha) \subset X_\alpha$, isto é, $T_\alpha \subset f^{-1}(X_\alpha)$. O mesmo vale para g .

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: \zeta$, e seja $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ o aberto de G_α associado a ζ .

Passo 1: $f^{-1}(X_\alpha) = T_\alpha = g^{-1}(X_\alpha)$

Seja $W \subset T$ aberto. Por naturalidade, $\eta_W(f|_W) = \zeta|_W$. Então

$$f(W) \subset X_\alpha \xLeftrightarrow{(b)} \zeta|_W \in G_\alpha(W) \xLeftrightarrow{\text{aberto}} W \subset T_\alpha.$$

Com $W = f^{-1}(X_\alpha)$ obtém-se $f^{-1}(X_\alpha) \subset T_\alpha$; com $W = T_\alpha$ obtém-se $f(T_\alpha) \subset X_\alpha$, isto é, $T_\alpha \subset f^{-1}(X_\alpha)$. O mesmo vale para g .

Passo 2: coincidem em cada T_α

Pelo Passo 1, $f|_{T_\alpha}$ e $g|_{T_\alpha}$ são morfismos $T_\alpha \rightarrow X_\alpha$, e $\eta_{T_\alpha}(f|_{T_\alpha}) = \zeta|_{T_\alpha} = \eta_{T_\alpha}(g|_{T_\alpha})$. Pela injetividade em (c), $f|_{T_\alpha} = g|_{T_\alpha}$.

Injetividade

Sejam $f, g: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \eta_T(g) =: \zeta$, e seja $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ o aberto de G_α associado a ζ .

Passo 1: $f^{-1}(X_\alpha) = T_\alpha = g^{-1}(X_\alpha)$

Seja $W \subset T$ aberto. Por naturalidade, $\eta_W(f|_W) = \zeta|_W$. Então

$$f(W) \subset X_\alpha \xLeftrightarrow{(b)} \zeta|_W \in G_\alpha(W) \xLeftrightarrow{\text{aberto}} W \subset T_\alpha.$$

Com $W = f^{-1}(X_\alpha)$ obtém-se $f^{-1}(X_\alpha) \subset T_\alpha$; com $W = T_\alpha$ obtém-se $f(T_\alpha) \subset X_\alpha$, isto é, $T_\alpha \subset f^{-1}(X_\alpha)$. O mesmo vale para g .

Passo 2: coincidem em cada T_α

Pelo Passo 1, $f|_{T_\alpha}$ e $g|_{T_\alpha}$ são morfismos $T_\alpha \rightarrow X_\alpha$, e $\eta_{T_\alpha}(f|_{T_\alpha}) = \zeta|_{T_\alpha} = \eta_{T_\alpha}(g|_{T_\alpha})$. Pela injetividade em (c), $f|_{T_\alpha} = g|_{T_\alpha}$.

Passo 3: colar

Por (a), os T_α recobrem T . Um morfismo de esquemas é uma aplicação contínua e um morfismo de feixes de anéis, e ambos são determinados localmente; logo $f = g$. $\square$

Sobrejetividade

Seja $\zeta \in F(T)$. Queremos $f: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \zeta$.

Sobrejetividade

Seja $\zeta \in F(T)$. Queremos $f: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \zeta$.

Passo 1: recobrir

Por (a), os abertos $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ recobrem T , e por G_α ser aberto, $\zeta|_{T_\alpha} \in G_\alpha(T_\alpha)$.

Sobrejetividade

Seja $\zeta \in F(T)$. Queremos $f: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \zeta$.

Passo 1: recobrir

Por (a), os abertos $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ recobrem T , e por G_α ser aberto, $\zeta|_{T_\alpha} \in G_\alpha(T_\alpha)$.

Passo 2: resolver em cada aberto

Pela sobrejetividade em (c), existe $f_\alpha: T_\alpha \rightarrow X_\alpha \subset X$ com $\eta_{T_\alpha}(f_\alpha) = \zeta|_{T_\alpha}$.

Sobrejetividade

Seja $\zeta \in F(T)$. Queremos $f: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \zeta$.

Passo 1: recobrir

Por (a), os abertos $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ recobrem T , e por G_α ser aberto, $\zeta|_{T_\alpha} \in G_\alpha(T_\alpha)$.

Passo 2: resolver em cada aberto

Pela sobrejetividade em (c), existe $f_\alpha: T_\alpha \rightarrow X_\alpha \subset X$ com $\eta_{T_\alpha}(f_\alpha) = \zeta|_{T_\alpha}$.

Passo 3: compatibilidade nas interseções

Sobre $T_{\alpha\beta} := T_\alpha \cap T_\beta$, por naturalidade,

$$\eta_{T_{\alpha\beta}}(f_\alpha|_{T_{\alpha\beta}}) = \zeta|_{T_{\alpha\beta}} = \eta_{T_{\alpha\beta}}(f_\beta|_{T_{\alpha\beta}}).$$

Pela injetividade já provada, aplicada ao esquema $T_{\alpha\beta}$, $f_\alpha|_{T_{\alpha\beta}} = f_\beta|_{T_{\alpha\beta}}$.

Sobrejetividade

Seja $\zeta \in F(T)$. Queremos $f: T \rightarrow X$ com $\eta_T(f) = \zeta$.

Passo 1: recobrir

Por (a), os abertos $T_\alpha := T_{\zeta, \alpha}$ recobrem T , e por G_α ser aberto, $\zeta|_{T_\alpha} \in G_\alpha(T_\alpha)$.

Passo 2: resolver em cada aberto

Pela sobrejetividade em (c), existe $f_\alpha: T_\alpha \rightarrow X_\alpha \subset X$ com $\eta_{T_\alpha}(f_\alpha) = \zeta|_{T_\alpha}$.

Passo 3: compatibilidade nas interseções

Sobre $T_{\alpha\beta} := T_\alpha \cap T_\beta$, por naturalidade,

$$\eta_{T_{\alpha\beta}}(f_\alpha|_{T_{\alpha\beta}}) = \zeta|_{T_{\alpha\beta}} = \eta_{T_{\alpha\beta}}(f_\beta|_{T_{\alpha\beta}}).$$

Pela injetividade já provada, aplicada ao esquema $T_{\alpha\beta}$, $f_\alpha|_{T_{\alpha\beta}} = f_\beta|_{T_{\alpha\beta}}$.

Passo 4: colar

Os f_α colam num morfismo $f: T \rightarrow X$ com $f|_{T_\alpha} = f_\alpha$. Então $\eta_T(f)|_{T_\alpha} = \eta_{T_\alpha}(f_\alpha) = \zeta|_{T_\alpha}$ para todo α , e por **(S)** segue $\eta_T(f) = \zeta$. □

O que falta verificar para a Grassmanniana

Aplicamos o lema com $F = \underline{\text{Grass}}(V, d)$, $X = \text{Grass}(V, d)$, $\xi = [q_{\text{univ}}]$, $X_S = U_S$
e

$$G_S(T) = U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

O que falta verificar para a Grassmanniana

Aplicamos o lema com $F = \underline{\text{Grass}}(V, d)$, $X = \text{Grass}(V, d)$, $\xi = [q_{\text{univ}}]$, $X_S = U_S$
e

$$G_S(T) = U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

	hipótese	ferramenta
(Z)	$\underline{\text{Grass}}(V, d)$ satisfaz (S)	núcleos são subfeixes
(H1)	$U_S(T)$ é subfuntor	(E1), (E2)
(H2)	$U_S(T)$ é aberto	o lugar de isomorfismo
(H3)	os $U_S(T)$ recobrem	extração de base
(H4)	$\text{Hom}(T, U_S) \cong U_S(T)$ via η	forma normalizada, $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^N)$
(H5)	$\eta_T(f) \in U_S(T) \iff f(T) \subset U_S$	lugar de isomorfismo + Aula 11

O que falta verificar para a Grassmanniana

Aplicamos o lema com $F = \underline{\text{Grass}}(V, d)$, $X = \text{Grass}(V, d)$, $\xi = [q_{\text{univ}}]$, $X_S = U_S$
e

$$G_S(T) = U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

	hipótese	ferramenta
(Z)	$\underline{\text{Grass}}(V, d)$ satisfaz (S)	núcleos são subfeixes
(H1)	$U_S(T)$ é subfuntor	(E1), (E2)
(H2)	$U_S(T)$ é aberto	o lugar de isomorfismo
(H3)	os $U_S(T)$ recobrem	extração de base
(H4)	$\text{Hom}(T, U_S) \cong U_S(T)$ via η	forma normalizada, $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^N)$
(H5)	$\eta_T(f) \in U_S(T) \iff f(T) \subset U_S$	lugar de isomorfismo + Aula 11

(Z) é o feixe; (H1), (H2), (H3) são a hipótese (a); (H5) é a hipótese (b); (H4) é a hipótese (c). Nada mais será necessário.

(Z): Grass(V, d) satisfaz (S)

Sejam $[q], [q'] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ com $[q|_{W_i}] = [q'|_{W_i}]$ para um recobrimento aberto $T = \bigcup W_i$. Queremos $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$ como subfeixes de $V \otimes \mathcal{O}_T$.

(Z): Grass(V, d) satisfaz (S)

Sejam $[q], [q'] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ com $[q|_{W_i}] = [q'|_{W_i}]$ para um recobrimento aberto $T = \bigcup W_i$. Queremos $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$ como subfeixes de $V \otimes \mathcal{O}_T$.

Passo 1: a hipótese, em termos de núcleos

Núcleo comuta com restrição a abertos, logo a hipótese diz $(\text{Ker } q)|_{W_i} = (\text{Ker } q')|_{W_i}$ para todo i .

(Z): Grass(V, d) satisfaz (S)

Sejam $[q], [q'] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ com $[q|_{W_i}] = [q'|_{W_i}]$ para um recobrimento aberto $T = \bigcup W_i$. Queremos $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$ como subfeixes de $V \otimes \mathcal{O}_T$.

Passo 1: a hipótese, em termos de núcleos

Núcleo comuta com restrição a abertos, logo a hipótese diz $(\text{Ker } q)|_{W_i} = (\text{Ker } q')|_{W_i}$ para todo i .

Passo 2: um subfeixe é determinado localmente

Seja $W \subset T$ aberto e $s \in (\text{Ker } q)(W)$. Para cada i , $s|_{W \cap W_i} \in (\text{Ker } q)(W \cap W_i) = (\text{Ker } q')(W \cap W_i)$. Como $\text{Ker } q'$ é feixe, essas seções colam num $s' \in (\text{Ker } q')(W)$ com $s'|_{W \cap W_i} = s|_{W \cap W_i}$ para todo i . Como $V \otimes \mathcal{O}_T$ é feixe, $s' = s$; logo $s \in (\text{Ker } q')(W)$. Trocando os papéis, $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$. □

(Z): Grass(V, d) satisfaz (S)

Sejam $[q], [q'] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ com $[q|_{W_i}] = [q'|_{W_i}]$ para um recobrimento aberto $T = \bigcup W_i$. Queremos $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$ como subfeixes de $V \otimes \mathcal{O}_T$.

Passo 1: a hipótese, em termos de núcleos

Núcleo comuta com restrição a abertos, logo a hipótese diz $(\text{Ker } q)|_{W_i} = (\text{Ker } q')|_{W_i}$ para todo i .

Passo 2: um subfeixe é determinado localmente

Seja $W \subset T$ aberto e $s \in (\text{Ker } q)(W)$. Para cada i , $s|_{W \cap W_i} \in (\text{Ker } q)(W \cap W_i) = (\text{Ker } q')(W \cap W_i)$. Como $\text{Ker } q'$ é feixe, essas seções colam num $s' \in (\text{Ker } q')(W)$ com $s'|_{W \cap W_i} = s|_{W \cap W_i}$ para todo i . Como $V \otimes \mathcal{O}_T$ é feixe, $s' = s$; logo $s \in (\text{Ker } q')(W)$. Trocando os papéis, $\text{Ker } q = \text{Ker } q'$. □

A relação do funtor é “mesmo núcleo”, e núcleos são subfeixes: por isso (S) sai de graça. O axioma (C) também vale, mas hoje não é usado.

(H1): as cartas em famílias são subfuntores

Definição

$$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

(H1): as cartas em famílias são subfuntores

Definição

$$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$$

Boa definição

Se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**. Compor com um isomorfismo não altera a condição “é isomorfismo”, logo ela depende só da classe $[q]$.

(H1): as cartas em famílias são subfuntores

Definição

$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$

Boa definição

Se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**. Compor com um isomorfismo não altera a condição “é isomorfismo”, logo ela depende só da classe $[q]$.

Estabilidade por pullback

$(f^*q)E_S = f^*(qE_S)$ por **(E2)**, e o pullback de um isomorfismo é isomorfismo, com inverso f^* do inverso.



(H1): as cartas em famílias são subfuntores

Definição

$U_S(T) := \{[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T) : qE_S \text{ é isomorfismo}\}.$

Boa definição

Se $q' = \theta q$ com θ isomorfismo, então $q'E_S = \theta(qE_S)$ por **(E1)**. Compor com um isomorfismo não altera a condição “é isomorfismo”, logo ela depende só da classe $[q]$.

Estabilidade por pullback

$(f^*q)E_S = f^*(qE_S)$ por **(E2)**, e o pullback de um isomorfismo é isomorfismo, com inverso f^* do inverso. □

Para $T = \text{Spec } k$ isto é exatamente $\det M_S \neq 0$: recuperamos a definição da Aula 9a, agora válida sobre qualquer base.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante $\Phi: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante $\Phi: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. Liberdade: $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um único representante $\Phi: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. Liberdade: $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}: Q \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi \sim q$ e $\Phi E_S = \tau(qE_S) = \text{id}$, por **(E1)**.

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é **livre** de posto d , e $[q]$ tem um **único** representante $\Phi: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. Liberdade: $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}: Q \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi \sim q$ e $\Phi E_S = \tau(qE_S) = \text{id}$, por **(E1)**.

Unicidade: seja $\Phi' \sim q$ outro representante com alvo $\mathcal{O}_T^d$. Então $\Phi' = g\Phi$ com $g: \mathcal{O}_T^d \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ isomorfismo, isto é, $g \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_T)$. Por **(E1)**,

$$I_d = \Phi' E_S = g(\Phi E_S) = g I_d = g. \quad \square$$

Forma normalizada em famílias

Teorema

Seja $[q] \in U_S(T)$. Então Q é livre de posto d , e $[q]$ tem um único representante $\Phi: V \otimes \mathcal{O}_T \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ com $\Phi E_S = I_d$, a saber $\Phi = (qE_S)^{-1}q$.

Demonstração. Liberdade: $qE_S: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$ é isomorfismo e a fonte é livre.

Existência: com $\tau := (qE_S)^{-1}: Q \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ e $\Phi := \tau q$, tem-se $\Phi \sim q$ e $\Phi E_S = \tau(qE_S) = \text{id}$, por **(E1)**.

Unicidade: seja $\Phi' \sim q$ outro representante com alvo $\mathcal{O}_T^d$. Então $\Phi' = g\Phi$ com $g: \mathcal{O}_T^d \rightarrow \mathcal{O}_T^d$ isomorfismo, isto é, $g \in \text{GL}_d(\mathcal{O}_T)$. Por **(E1)**,

$$I_d = \Phi' E_S = g(\Phi E_S) = g I_d = g. \quad \square$$

A normalização mata exatamente a liberdade de GL_d

quocientes módulo iso $\rightarrow$ escolha de $S \rightarrow \Phi E_S = I_d \rightarrow$ representante único.

É a versão em famílias do fato da Aula 9a: a ação de GL_d nas matrizes de posto máximo é livre.

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , a aplicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N, \quad g \longmapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N)),$$

é bijetora.

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , a aplicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N, \quad g \longmapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N)),$$

é bijetora.

Demonstração. $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ para todo k -esquema T , e um homomorfismo de k -álgebras a partir de $k[x_1, \dots, x_N]$ é livremente determinado pelas imagens dos x_i . □

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , a aplicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N, \quad g \longmapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N)),$$

é bijetora.

Demonstração. $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ para todo k -esquema T , e um homomorfismo de k -álgebras a partir de $k[x_1, \dots, x_N]$ é livremente determinado pelas imagens dos x_i . □

Pullback de uma matriz de seções

Se $u: \mathcal{O}_X^m \rightarrow \mathcal{O}_X^p$ é dado por uma matriz M de seções globais de $\mathcal{O}_X$, então $f^*u: \mathcal{O}_T^m \rightarrow \mathcal{O}_T^p$ é dado pela matriz $f^\#(M)$, obtida aplicando $f^\#: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ entrada a entrada. É a definição de f^* em módulos livres.

Morfismos para o espaço afim

Teorema

Para todo T e todo N , a aplicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_k}(T, \mathbb{A}^N) \longrightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^N, \quad g \longmapsto (g^\#(x_1), \dots, g^\#(x_N)),$$

é bijetora.

Demonstração. $\mathrm{Hom}(T, \mathrm{Spec} R) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ para todo k -esquema T , e um homomorfismo de k -álgebras a partir de $k[x_1, \dots, x_N]$ é livremente determinado pelas imagens dos x_i . □

Pullback de uma matriz de seções

Se $u: \mathcal{O}_X^m \rightarrow \mathcal{O}_X^p$ é dado por uma matriz M de seções globais de $\mathcal{O}_X$, então $f^*u: \mathcal{O}_T^m \rightarrow \mathcal{O}_T^p$ é dado pela matriz $f^\#(M)$, obtida aplicando $f^\#: \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ entrada a entrada. É a definição de f^* em módulos livres.

Com $N = d(n - d)$: um morfismo $T \rightarrow U_S$ é uma matriz $d \times (n - d)$ de seções globais de $\mathcal{O}_T$.

(H4): a carta representa $U_S(T)$

Teorema

Para todo T , a aplicação $\text{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$, $f \mapsto [f^*q_S]$, é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

(H4): a carta representa $U_S(T)$

Teorema

Para todo T , a aplicação $\text{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$, $f \mapsto [f^*q_S]$, é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. Pelo slide anterior, f^*q_S tem matriz $f^\#(M^S)$, cujas colunas S são $f^\#(I_d) = I_d$: logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $(f^*q_S)E_S = I_d$. É sobrejetora, está em $U_S(T)$ e já está normalizada.

(H4): a carta representa $U_S(T)$

Teorema

Para todo T , a aplicação $\text{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$, $f \mapsto [f^*q_S]$, é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. Pelo slide anterior, f^*q_S tem matriz $f^\#(M^S)$, cujas colunas S são $f^\#(I_d) = I_d$: logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $(f^*q_S)E_S = I_d$. É sobrejetora, está em $U_S(T)$ e já está normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

(H4): a carta representa $U_S(T)$

Teorema

Para todo T , a aplicação $\text{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$, $f \mapsto [f^*q_S]$, é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. Pelo slide anterior, f^*q_S tem matriz $f^\#(M^S)$, cujas colunas S são $f^\#(I_d) = I_d$: logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $(f^*q_S)E_S = I_d$. É sobrejetora, está em $U_S(T)$ e já está normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

Sobrejetora. Dado $[q] \in U_S(T)$ com normalizada $\Phi = [I_d \mid A_0]$, a matriz A_0 define $f: T \rightarrow \mathbb{A}^N$ com $f^\#(A) = A_0$, e então $f^*q_S = [I_d \mid A_0] = \Phi \sim q$. $\square$

(H4): a carta representa $U_S(T)$

Teorema

Para todo T , a aplicação $\text{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$, $f \mapsto [f^*q_S]$, é bijetora, e a forma normalizada de f^*q_S é $[I_d \mid f^\#(A)]$.

Bem definida. Pelo slide anterior, f^*q_S tem matriz $f^\#(M^S)$, cujas colunas S são $f^\#(I_d) = I_d$: logo $f^*q_S = [I_d \mid f^\#(A)]$, que satisfaz $(f^*q_S)E_S = I_d$. É sobrejetora, está em $U_S(T)$ e já está normalizada.

Injetora. Se $[f^*q_S] = [g^*q_S]$, as normalizadas coincidem, por unicidade; logo $f^\#(A) = g^\#(A)$ e $f = g$ pelo teorema anterior.

Sobrejetora. Dado $[q] \in U_S(T)$ com normalizada $\Phi = [I_d \mid A_0]$, a matriz A_0 define $f: T \rightarrow \mathbb{A}^N$ com $f^\#(A) = A_0$, e então $f^*q_S = [I_d \mid A_0] = \Phi \sim q$. $\square$

É a aplicação η restrita

Seja $j: U_S \hookrightarrow \text{Grass}(V, d)$ a inclusão e $f: T \rightarrow U_S$. Então

$$\eta_T(j \circ f) = [(j \circ f)^*q_{\text{univ}}] = [f^*(j^*q_{\text{univ}})] = [f^*q_S],$$

pois $j^*q_{\text{univ}} = q_{\text{univ}}|_{U_S} \sim q_S$ pela Aula 11, e f^* preserva $\sim$. Assim a bijecção do teorema é exatamente a hipótese (c) do lema.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d sobre T e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$ para todo $f: T' \rightarrow T$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d sobre T e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$ para todo $f: T' \rightarrow T$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

Passo 1: localizar

Num aberto W onde Q é livre, $u|_W$ é uma matriz quadrada M sobre $\mathcal{O}(W)$. Trocar a trivialização de $Q|_W$ troca M por gM com $g \in \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}(W))$, o que multiplica $\det M$ pela unidade $\det g$: a condição $\det M(t) \neq 0$ não depende da trivialização.

O lugar de isomorfismo

Teorema

Sejam Q localmente livre de posto d sobre T e $u: \mathcal{O}_T^d \rightarrow Q$. Então

$$T_u := \{t \in T : u \otimes \kappa(t) \text{ é isomorfismo}\}$$

é aberto, $u|_{T_u}$ é isomorfismo, e $f^{-1}(T_u) = T_{f^*u}$ para todo $f: T' \rightarrow T$. Em particular, f^*u é isomorfismo se e só se $f(T') \subset T_u$.

Passo 1: localizar

Num aberto W onde Q é livre, $u|_W$ é uma matriz quadrada M sobre $\mathcal{O}(W)$. Trocar a trivialização de $Q|_W$ troca M por gM com $g \in \text{GL}_d(\mathcal{O}(W))$, o que multiplica $\det M$ pela unidade $\det g$: a condição $\det M(t) \neq 0$ não depende da trivialização.

Passo 2: a condição pontual

$u \otimes \kappa(t)$ é a matriz $M(t)$ sobre $\kappa(t)$, invertível se e só se $\det M(t) \neq 0$. Logo $T_u \cap W = \{t \in W : \det M(t) \neq 0\} = D(\det M)$, que é aberto de W . Como os W recobrem T , T_u é aberto.

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W = D(\det M)$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível em $\mathcal{O}(D(\det M))$. De

$$M \cdot \operatorname{adj}(M) = \operatorname{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \operatorname{adj}(M)$. Assim u é isomorfismo sobre $T_u \cap W$ para cada W , e portanto sobre T_u .

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W = D(\det M)$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível em $\mathcal{O}(D(\det M))$. De

$$M \cdot \operatorname{adj}(M) = \operatorname{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \operatorname{adj}(M)$. Assim u é isomorfismo sobre $T_u \cap W$ para cada W , e portanto sobre T_u .

Passo 4: pullback

Sobre $f^{-1}(W)$, a matriz de f^*u é $f^\#(M)$, e $\det f^\#(M) = f^\#(\det M)$, pois $f^\#$ é homomorfismo de anéis. Para $t' \in f^{-1}(W)$ com $t = f(t')$, o morfismo induzido nos corpos residuais $\kappa(t) \rightarrow \kappa(t')$ leva $\det M(t)$ em $\det f^\#(M)(t')$. Um homomorfismo de corpos é injetor, logo

$$\det f^\#(M)(t') \neq 0 \iff \det M(t) \neq 0, \quad \text{isto é,} \quad T_{f^*u} = f^{-1}(T_u).$$

O lugar de isomorfismo: conclusão

Passo 3: a adjunta

Sobre $T_u \cap W = D(\det M)$ a seção $\det M$ não se anula em ponto algum, logo é invertível em $\mathcal{O}(D(\det M))$. De

$$M \cdot \text{adj}(M) = \text{adj}(M) \cdot M = \det(M) I_d$$

segue $M^{-1} = (\det M)^{-1} \text{adj}(M)$. Assim u é isomorfismo sobre $T_u \cap W$ para cada W , e portanto sobre T_u .

Passo 4: pullback

Sobre $f^{-1}(W)$, a matriz de f^*u é $f^\#(M)$, e $\det f^\#(M) = f^\#(\det M)$, pois $f^\#$ é homomorfismo de anéis. Para $t' \in f^{-1}(W)$ com $t = f(t')$, o morfismo induzido nos corpos residuais $\kappa(t) \rightarrow \kappa(t')$ leva $\det M(t)$ em $\det f^\#(M)(t')$. Um homomorfismo de corpos é injetor, logo

$$\det f^\#(M)(t') \neq 0 \iff \det M(t) \neq 0, \quad \text{isto é,} \quad T_{f^*u} = f^{-1}(T_u).$$

A última afirmação

f^*u é isomorfismo $\iff T_{f^*u} = T'$ (Passos 2 e 3 aplicados a f^*u)
 $\iff f^{-1}(T_u) = T' \iff f(T') \subset T_u$.



(H2) e (H5): as cartas são abertas e compatíveis com η

(H2): $U_S(T)$ é subfuntor aberto, com $T_{[q],S} = T_{qE_S}$

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ e $f: T' \rightarrow T$. Por **(E2)** e pelo lugar de isomorfismo com $u = qE_S$,

$$[f^*q] \in U_S(T') \iff f^*(qE_S) \text{ é isomorfismo} \iff f(T') \subset T_{qE_S}.$$

É a definição de subfuntor aberto, com $T_{[q],S} := T_{qE_S}$. Está bem definido na classe, pois $(\theta q)E_S = \theta(qE_S)$ tem o mesmo lugar de isomorfismo.

(H2) e (H5): as cartas são abertas e compatíveis com η

(H2): $U_S(T)$ é subfuntor aberto, com $T_{[q],S} = T_{qE_S}$

Seja $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$ e $f: T' \rightarrow T$. Por **(E2)** e pelo lugar de isomorfismo com $u = qE_S$,

$$[f^*q] \in U_S(T') \iff f^*(qE_S) \text{ é isomorfismo} \iff f(T') \subset T_{qE_S}.$$

É a definição de subfuntor aberto, com $T_{[q],S} := T_{qE_S}$. Está bem definido na classe, pois $(\theta q)E_S = \theta(qE_S)$ tem o mesmo lugar de isomorfismo.

(H5): $\eta_T(f) \in U_S(T) \iff f(T) \subset U_S$

Seja $f: T \rightarrow \text{Grass}(V, d)$. Por **(E2)** e pelo lugar de isomorfismo com $u = q_{\text{univ}}E_S$,

$$\eta_T(f) = [f^*q_{\text{univ}}] \in U_S(T) \iff f^*(q_{\text{univ}}E_S) \text{ é iso} \iff f(T) \subset T_{q_{\text{univ}}E_S}.$$

Resta ver que $T_{q_{\text{univ}}E_S} = U_S$ como subconjuntos de $\text{Grass}(V, d)$. Para $t \in \text{Grass}(V, d)$,

$$t \in T_{q_{\text{univ}}E_S} \iff \text{as colunas } S \text{ de } q_{\text{univ}} \otimes \kappa(t) \text{ formam base} \iff t \in U_S,$$

a segunda equivalência sendo a consequência pontual da Aula 11 recordada no início. □

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes_k \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$.

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes_k \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes \kappa(t)$ é exato à direita e q é sobrejetora; e o alvo tem dimensão d sobre $\kappa(t)$, pois Q é localmente livre de posto d .

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes_k \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes \kappa(t)$ é exato à direita e q é sobrejetora; e o alvo tem dimensão d sobre $\kappa(t)$, pois Q é localmente livre de posto d . Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base, aqui com d elementos.

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes_k \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes \kappa(t)$ é exato à direita e q é sobrejetora; e o alvo tem dimensão d sobre $\kappa(t)$, pois Q é localmente livre de posto d . Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base, aqui com d elementos. Seja S o conjunto dos d índices extraídos. Então $\bar{q}E_S$ leva a base canônica de $\kappa(t)^d$ numa base do alvo, logo é isomorfismo, isto é, $t \in T_{qE_S}$. $\square$

(H3): as cartas recobrem

Teorema

Para todo T e todo $[q] \in \underline{\text{Grass}}(V, d)(T)$, tem-se $\bigcup_{|S|=d} T_{qE_S} = T$.

Demonstração. Seja $t \in T$ e $\bar{q} := q \otimes \kappa(t): V \otimes_k \kappa(t) \rightarrow Q \otimes \kappa(t)$. Ela é sobrejetora, pois $\otimes \kappa(t)$ é exato à direita e q é sobrejetora; e o alvo tem dimensão d sobre $\kappa(t)$, pois Q é localmente livre de posto d .

Os vetores $\bar{q}(e_1), \dots, \bar{q}(e_n)$ geram esse espaço; de um conjunto gerador extrai-se uma base, aqui com d elementos.

Seja S o conjunto dos d índices extraídos. Então $\bar{q}E_S$ leva a base canônica de $\kappa(t)^d$ numa base do alvo, logo é isomorfismo, isto é, $t \in T_{qE_S}$. $\square$

Versão em famílias da observação da Aula 9a: nenhum S serve para todos os pontos, mas cada ponto admite algum.

O teorema de representabilidade

Teorema

Para todo k -esquema T , a aplicação

$$\eta_T: \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Grass}(V, d)) \longrightarrow \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)(T), \quad f \longmapsto [f^* q_{\operatorname{univ}}],$$

é bijetora. Isto é, $(\operatorname{Grass}(V, d), q_{\operatorname{univ}})$ representa o funtor de Grassmann.

O teorema de representabilidade

Teorema

Para todo k -esquema T , a aplicação

$$\eta_T: \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Grass}(V, d)) \longrightarrow \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)(T), \quad f \longmapsto [f^* q_{\operatorname{univ}}],$$

é bijetora. Isto é, $(\operatorname{Grass}(V, d), q_{\operatorname{univ}})$ representa o funtor de Grassmann.

Demonstração. Aplicamos o lema de colagem a $F = \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)$, $X = \operatorname{Grass}(V, d)$, $\xi = [q_{\operatorname{univ}}]$, $X_S = U_S$ e $G_S = U_S(-)$.

- F satisfaz (S), por (Z);
- os $U_S(-)$ são subfuntores abertos, por (H1) e (H2), e recobrem F , por (H3): é a hipótese (a);
- $\eta_T(f) \in U_S(T) \iff f(T) \subset U_S$, por (H5): é a hipótese (b);
- $\operatorname{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$ é bijetora, por (H4): é a hipótese (c). □

O teorema de representabilidade

Teorema

Para todo k -esquema T , a aplicação

$$\eta_T: \operatorname{Hom}(T, \operatorname{Grass}(V, d)) \longrightarrow \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)(T), \quad f \longmapsto [f^* q_{\operatorname{univ}}],$$

é bijetora. Isto é, $(\operatorname{Grass}(V, d), q_{\operatorname{univ}})$ representa o funtor de Grassmann.

Demonstração. Aplicamos o lema de colagem a $F = \underline{\operatorname{Grass}}(V, d)$, $X = \operatorname{Grass}(V, d)$, $\xi = [q_{\operatorname{univ}}]$, $X_S = U_S$ e $G_S = U_S(-)$.

- F satisfaz (S), por (Z);
- os $U_S(-)$ são subfuntores abertos, por (H1) e (H2), e recobrem F , por (H3): é a hipótese (a);
- $\eta_T(f) \in U_S(T) \iff f(T) \subset U_S$, por (H5): é a hipótese (b);
- $\operatorname{Hom}(T, U_S) \rightarrow U_S(T)$ é bijetora, por (H4): é a hipótese (c). □

Lacuna 2 fechada

$\operatorname{Grass}(V, d)$ é um espaço de módulos fino para quocientes localmente livres de posto d de $V \otimes \mathcal{O}_T$, com objeto universal q_{univ} .

O caso $d = 1$: o dicionário

Para $d = 1$ tem-se $\text{Grass}(V, 1) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n-1}$, e a Aula 11 identificou $Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}(1)$, com $q_{\text{univ}}(e_j) = x_j$. Traduzimos os três ingredientes do funtor.

O caso $d = 1$: o dicionário

Para $d = 1$ tem-se $\text{Grass}(V, 1) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n-1}$, e a Aula 11 identificou $Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}(1)$, com $q_{\text{univ}}(e_j) = x_j$. Traduzimos os três ingredientes do funtor.

Um quociente em retas é uma lista de seções

Dar $q: \mathcal{O}_T^n \rightarrow \mathcal{L}$ com $\mathcal{L}$ invertível é dar as n seções $s_j := q(e_j) \in \Gamma(T, \mathcal{L})$, pois um morfismo a partir de um módulo livre é determinado pelas imagens da base. Em símbolos, $q = [s_1 \cdots s_n]$.

O caso $d = 1$: o dicionário

Para $d = 1$ tem-se $\text{Grass}(V, 1) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n-1}$, e a Aula 11 identificou $Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}(1)$, com $q_{\text{univ}}(e_j) = x_j$. Traduzimos os três ingredientes do funtor.

Um quociente em retas é uma lista de seções

Dar $q: \mathcal{O}_T^n \rightarrow \mathcal{L}$ com $\mathcal{L}$ invertível é dar as n seções $s_j := q(e_j) \in \Gamma(T, \mathcal{L})$, pois um morfismo a partir de um módulo livre é determinado pelas imagens da base. Em símbolos, $q = [s_1 \cdots s_n]$.

Sobrejetora $\iff$ as seções geram

q é sobrejetora se e só se é sobrejetora em cada talo. O talo $\mathcal{L}_t$ é gerado, como $\mathcal{O}_{T,t}$ -módulo, pela imagem de q_t , que é o submódulo gerado por $s_{1,t}, \dots, s_{n,t}$. Logo q sobrejetora $\iff$ as s_j geram $\mathcal{L}_t$ para todo t , que é a definição de “ $s_1, \dots, s_n$ geram $\mathcal{L}$ ”.

O caso $d = 1$: o dicionário

Para $d = 1$ tem-se $\text{Grass}(V, 1) = \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n-1}$, e a Aula 11 identificou $Q_{\text{univ}} \cong \mathcal{O}(1)$, com $q_{\text{univ}}(e_j) = x_j$. Traduzimos os três ingredientes do funtor.

Um quociente em retas é uma lista de seções

Dar $q: \mathcal{O}_T^n \rightarrow \mathcal{L}$ com $\mathcal{L}$ invertível é dar as n seções $s_j := q(e_j) \in \Gamma(T, \mathcal{L})$, pois um morfismo a partir de um módulo livre é determinado pelas imagens da base. Em símbolos, $q = [s_1 \cdots s_n]$.

Sobrejetora $\iff$ as seções geram

q é sobrejetora se e só se é sobrejetora em cada talo. O talo $\mathcal{L}_t$ é gerado, como $\mathcal{O}_{T,t}$ -módulo, pela imagem de q_t , que é o submódulo gerado por $s_{1,t}, \dots, s_{n,t}$. Logo q sobrejetora $\iff$ as s_j geram $\mathcal{L}_t$ para todo t , que é a definição de “ $s_1, \dots, s_n$ geram $\mathcal{L}$ ”.

A relação $\sim \iff$ “a menos de isomorfismo”, compatível com as seções

$q \sim q'$ significa que existe $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ isomorfismo com $q' = \theta q$, isto é, com $\theta(s_j) = s'_j$ para todo j . Assim

$$\underline{\text{Grass}}(V, 1)(T) = \{(\mathcal{L}, s_1, \dots, s_n) : \mathcal{L} \text{ invertível, as } s_j \text{ geram}\} / \cong.$$

O caso $d = 1$: o Teorema II.7.1 de Hartshorne

Corolário

Seja T um k -esquema. A aplicação $f \mapsto (f^*\mathcal{O}(1), f^*x_1, \dots, f^*x_n)$ é uma bijeção entre $\text{Hom}(T, \mathbb{P}^{n-1})$ e o conjunto das classes de isomorfismo de $(\mathcal{L}, s_1, \dots, s_n)$ com $\mathcal{L}$ invertível e as s_j gerando $\mathcal{L}$.

O caso $d = 1$: o Teorema II.7.1 de Hartshorne

Corolário

Seja T um k -esquema. A aplicação $f \mapsto (f^*\mathcal{O}(1), f^*x_1, \dots, f^*x_n)$ é uma bijeção entre $\text{Hom}(T, \mathbb{P}^{n-1})$ e o conjunto das classes de isomorfismo de $(\mathcal{L}, s_1, \dots, s_n)$ com $\mathcal{L}$ invertível e as s_j gerando $\mathcal{L}$.

Demonstração. É o teorema de representabilidade com $d = 1$, lido pelo dicionário do slide anterior: $\eta_T(f) = [f^*q_{\text{univ}}]$, e f^*q_{univ} tem alvo $f^*\mathcal{O}(1)$ e leva e_j em f^*x_j . □

O caso $d = 1$: o Teorema II.7.1 de Hartshorne

Corolário

Seja T um k -esquema. A aplicação $f \mapsto (f^*\mathcal{O}(1), f^*x_1, \dots, f^*x_n)$ é uma bijeção entre $\text{Hom}(T, \mathbb{P}^{n-1})$ e o conjunto das classes de isomorfismo de $(\mathcal{L}, s_1, \dots, s_n)$ com $\mathcal{L}$ invertível e as s_j gerando $\mathcal{L}$.

Demonstração. É o teorema de representabilidade com $d = 1$, lido pelo dicionário do slide anterior: $\eta_T(f) = [f^*q_{\text{univ}}]$, e f^*q_{univ} tem alvo $f^*\mathcal{O}(1)$ e leva e_j em f^*x_j . □

Item a item

nosso enunciado	Hartshorne II.7.1
η_T bem definida	item (a): $f^*\mathcal{O}(1)$ é invertível e é gerado pelos f^*x_i
η_T sobrejetora	item (b), existência de φ
η_T injetora	item (b), unicidade de φ
a relação $\sim$ do funtor	a cláusula <i>under this isomorphism</i>

O caso $d = 1$: o Teorema II.7.1 de Hartshorne

Corolário

Seja T um k -esquema. A aplicação $f \mapsto (f^*\mathcal{O}(1), f^*x_1, \dots, f^*x_n)$ é uma bijeção entre $\text{Hom}(T, \mathbb{P}^{n-1})$ e o conjunto das classes de isomorfismo de $(\mathcal{L}, s_1, \dots, s_n)$ com $\mathcal{L}$ invertível e as s_j gerando $\mathcal{L}$.

Demonstração. É o teorema de representabilidade com $d = 1$, lido pelo dicionário do slide anterior: $\eta_T(f) = [f^*q_{\text{univ}}]$, e f^*q_{univ} tem alvo $f^*\mathcal{O}(1)$ e leva e_j em f^*x_j . □

Item a item

nosso enunciado	Hartshorne II.7.1
η_T bem definida	item (a): $f^*\mathcal{O}(1)$ é invertível e é gerado pelos f^*x_i
η_T sobrejetora	item (b), existência de φ
η_T injetora	item (b), unicidade de φ
a relação $\sim$ do funtor	a cláusula <i>under this isomorphism</i>

Duas diferenças de notação

Hartshorne escreve $\mathbb{P}_A^n$ com $s_0, \dots, s_n$: o n dele é o nosso $n - 1$. E ele trabalha sobre um anel A qualquer; nenhuma prova desta aula usou que k é corpo, então tudo vale sobre $\text{Spec } A$.

Rigidez: o isomorfismo também é único

Em (b), Hartshorne afirma a unicidade de φ , não a do isomorfismo $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Mas ela vale.

Rigidez: o isomorfismo também é único

Em (b), Hartshorne afirma a unicidade de φ , não a do isomorfismo $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Mas ela vale.

Teorema

Sejam $\mathcal{L}$ invertível e $s_1, \dots, s_n$ geradores. Se $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é um morfismo com $\theta(s_j) = s_j$ para todo j , então $\theta = \text{id}$.

Rigidez: o isomorfismo também é único

Em (b), Hartshorne afirma a unicidade de φ , não a do isomorfismo $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Mas ela vale.

Teorema

Sejam $\mathcal{L}$ invertível e $s_1, \dots, s_n$ geradores. Se $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é um morfismo com $\theta(s_j) = s_j$ para todo j , então $\theta = \text{id}$.

Demonstração. Seja $t \in T$. O talo $\mathcal{L}_t$ é gerado por $s_{1,t}, \dots, s_{n,t}$, logo todo $u \in \mathcal{L}_t$ escreve-se $u = \sum_j a_j s_{j,t}$ com $a_j \in \mathcal{O}_{T,t}$. Como θ_t é $\mathcal{O}_{T,t}$ -linear,

$$\theta_t(u) = \sum_j a_j \theta_t(s_{j,t}) = \sum_j a_j s_{j,t} = u.$$

Logo $\theta_t = \text{id}$ para todo t , e um morfismo de feixes cujos talos são a identidade é a identidade. $\square$

Rigidez: o isomorfismo também é único

Em (b), Hartshorne afirma a unicidade de φ , não a do isomorfismo $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Mas ela vale.

Teorema

Sejam $\mathcal{L}$ invertível e $s_1, \dots, s_n$ geradores. Se $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é um morfismo com $\theta(s_j) = s_j$ para todo j , então $\theta = \text{id}$.

Demonstração. Seja $t \in T$. O talo $\mathcal{L}_t$ é gerado por $s_{1,t}, \dots, s_{n,t}$, logo todo $u \in \mathcal{L}_t$ escreve-se $u = \sum_j a_j s_{j,t}$ com $a_j \in \mathcal{O}_{T,t}$. Como θ_t é $\mathcal{O}_{T,t}$ -linear,

$$\theta_t(u) = \sum_j a_j \theta_t(s_{j,t}) = \sum_j a_j s_{j,t} = u.$$

Logo $\theta_t = \text{id}$ para todo t , e um morfismo de feixes cujos talos são a identidade é a identidade. $\square$

Consequência

$[q]$ determina $(\mathcal{L}, (s_j))$ a menos de um isomorfismo **único**: se $\theta, \theta': \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ levam s_j em s'_j , então $\theta^{-1}\theta'$ fixa os s_j , logo $\theta = \theta'$.

Rigidez: o isomorfismo também é único

Em (b), Hartshorne afirma a unicidade de φ , não a do isomorfismo $\mathcal{L} \cong \varphi^* \mathcal{O}(1)$. Mas ela vale.

Teorema

Sejam $\mathcal{L}$ invertível e $s_1, \dots, s_n$ geradores. Se $\theta: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ é um morfismo com $\theta(s_j) = s_j$ para todo j , então $\theta = \text{id}$.

Demonstração. Seja $t \in T$. O talo $\mathcal{L}_t$ é gerado por $s_{1,t}, \dots, s_{n,t}$, logo todo $u \in \mathcal{L}_t$ escreve-se $u = \sum_j a_j s_{j,t}$ com $a_j \in \mathcal{O}_{T,t}$. Como θ_t é $\mathcal{O}_{T,t}$ -linear,

$$\theta_t(u) = \sum_j a_j \theta_t(s_{j,t}) = \sum_j a_j s_{j,t} = u.$$

Logo $\theta_t = \text{id}$ para todo t , e um morfismo de feixes cujos talos são a identidade é a identidade. $\square$

Consequência

$[q]$ determina $(\mathcal{L}, (s_j))$ a menos de um isomorfismo **único**: se $\theta, \theta': \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}'$ levam s_j em s'_j , então $\theta^{-1}\theta'$ fixa os s_j , logo $\theta = \theta'$.

Por que isso importa

Um quociente não tem automorfismo além da identidade. É essa **rigidez** que permite a $\text{Grass}(V, d)$ ser móduli **fino**, com objeto universal, em vez de apenas grosseiro. Voltaremos a ela ao definir o funtor Quot .

Exemplo: a cônica, e um caso em que falha

A Veronese $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$T = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$, $(s_1, s_2, s_3) = (x^2, xy, y^2)$. Elas geram: em $\{x \neq 0\}$ a seção x^2 é, ela própria, um gerador de $\mathcal{O}(2)$; em $\{y \neq 0\}$ é y^2 ; e $\mathbb{P}^1 = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$. Logo há um morfismo, a saber $[x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$, cuja imagem é a cônica $z_0 z_2 = z_1^2$.

Exemplo: a cônica, e um caso em que falha

A Veronese $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$T = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$, $(s_1, s_2, s_3) = (x^2, xy, y^2)$. Elas geram: em $\{x \neq 0\}$ a seção x^2 é, ela própria, um gerador de $\mathcal{O}(2)$; em $\{y \neq 0\}$ é y^2 ; e $\mathbb{P}^1 = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$. Logo há um morfismo, a saber $[x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$, cuja imagem é a cônica $z_0 z_2 = z_1^2$.

As cartas, explicitamente

$T_{\{1\}} = \{x \neq 0\}$ é onde s_1 gera, e ali a forma normalizada é

$$\Phi = (qE_{\{1\}})^{-1}q = \left[1 \mid \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^2} \right], \quad N = d(n - d) = 2.$$

Como morfismo de cartas, é $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t, t^2)$, com $t = y/x$: a parábola afim, que é a cônica vista em $\{z_0 \neq 0\}$.

Exemplo: a cônica, e um caso em que falha

A Veronese $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$T = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$, $(s_1, s_2, s_3) = (x^2, xy, y^2)$. Elas geram: em $\{x \neq 0\}$ a seção x^2 é, ela própria, um gerador de $\mathcal{O}(2)$; em $\{y \neq 0\}$ é y^2 ; e $\mathbb{P}^1 = \{x \neq 0\} \cup \{y \neq 0\}$. Logo há um morfismo, a saber $[x : y] \mapsto [x^2 : xy : y^2]$, cuja imagem é a cônica $z_0 z_2 = z_1^2$.

As cartas, explicitamente

$T_{\{1\}} = \{x \neq 0\}$ é onde s_1 gera, e ali a forma normalizada é

$$\Phi = (qE_{\{1\}})^{-1}q = \left[1 \mid \frac{y}{x}, \frac{y^2}{x^2} \right], \quad N = d(n - d) = 2.$$

Como morfismo de cartas, é $\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^2$, $t \mapsto (t, t^2)$, com $t = y/x$: a parábola afim, que é a cônica vista em $\{z_0 \neq 0\}$.

O que acontece sem a sobrejetividade

Tome $\mathcal{L} = \mathcal{O}(2)$ com apenas $(s_1, s_2) = (x^2, xy)$: em $[0 : 1]$ ambas se anulam. Os lugares onde cada uma gera são $\{x \neq 0\}$ e $\{x \neq 0, y \neq 0\}$, de união $\{x \neq 0\} \neq \mathbb{P}^1$. O recobrimento (H3) falha exatamente porque q não é sobrejetora, e não há morfismo $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ com esses dados: é o ponto base.

Síntese

- 1 A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.

Síntese

- 1 A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.
- 2 As cartas em famílias $U_S(T) = \{qE_S \text{ isomorfismo}\}$ são subfuntores abertos, pelo lugar de isomorfismo, e recobrem o funtor, por extração de base.

Síntese

- 1 A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.
- 2 As cartas em famílias $U_S(T) = \{qE_S \text{ isomorfismo}\}$ são subfuntores abertos, pelo lugar de isomorfismo, e recobrem o funtor, por extração de base.
- 3 Em cada carta, a **forma normalizada** $\Phi E_S = I_d$ mata a liberdade de GL_d e identifica $U_S(T)$ com matrizes de seções, isto é, com $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^{d(n-d)})$.

Síntese

- ① A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.
- ② As cartas em famílias $U_S(T) = \{qE_S \text{ isomorfismo}\}$ são subfuntores abertos, pelo lugar de isomorfismo, e recobrem o funtor, por extração de base.
- ③ Em cada carta, a **forma normalizada** $\Phi E_S = I_d$ mata a liberdade de GL_d e identifica $U_S(T)$ com matrizes de seções, isto é, com $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^{d(n-d)})$.
- ④ Recobrir, resolver em cada carta e colar: η_T é bijetora e $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.

Síntese

- ① A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.
- ② As cartas em famílias $U_S(T) = \{qE_S \text{ isomorfismo}\}$ são subfuntores abertos, pelo lugar de isomorfismo, e recobrem o funtor, por extração de base.
- ③ Em cada carta, a **forma normalizada** $\Phi E_S = I_d$ mata a liberdade de GL_d e identifica $U_S(T)$ com matrizes de seções, isto é, com $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^{d(n-d)})$.
- ④ Recobrir, resolver em cada carta e colar: η_T é bijetora e $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.
- ⑤ Para $d = 1$ recuperamos a descrição clássica dos morfismos para $\mathbb{P}^{n-1}$.

Síntese

- 1 A prova tem uma só linha: um **lema de colagem** geral, que só usa o axioma de separação do feixe de Zariski, e a verificação das suas hipóteses.
- 2 As cartas em famílias $U_S(T) = \{qE_S \text{ isomorfismo}\}$ são subfuntores abertos, pelo lugar de isomorfismo, e recobrem o funtor, por extração de base.
- 3 Em cada carta, a **forma normalizada** $\Phi E_S = I_d$ mata a liberdade de GL_d e identifica $U_S(T)$ com matrizes de seções, isto é, com $\text{Hom}(T, \mathbb{A}^{d(n-d)})$.
- 4 Recobrir, resolver em cada carta e colar: η_T é bijetora e $(\text{Grass}(V, d), q_{\text{univ}})$ representa $\underline{\text{Grass}}(V, d)$.
- 5 Para $d = 1$ recuperamos a descrição clássica dos morfismos para $\mathbb{P}^{n-1}$.

Aula seguinte

$\det Q_{\text{univ}}$, as coordenadas de Plücker e o mergulho de $\text{Grass}(V, d)$ num espaço projetivo.

Referências

- Görtz, Wedhorn, *Algebraic Geometry I*, Cap. 8: funtores representáveis, feixes de Zariski e o critério de representabilidade por recobrimentos abertos; construção funtorial da Grassmanniana.
- Nitsure, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, em *FGA Explained*, §5.1: a Grassmanniana como funtor e as cartas afins.
- Grothendieck, Dieudonné, *EGA I* (edição Springer), §9.7: Grassmannianas.
- Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Teorema II.7.1: morfismos para o espaço projetivo, o caso $d = 1$.