

Álgebra Linear 2–2026/2
Lista 1

Professor: Charles Almeida - charlesalmeida@mat.ufmg.br

Notação: Nos exercícios a seguir, seja $\mathbb{F}$ um corpo. Denotamos por $\text{Seq}(\mathbb{F})$ o espaço vetorial de todas as sequências infinitas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com entradas em $\mathbb{F}$. Denotamos por $c_0(\mathbb{F})$ o subconjunto de $\text{Seq}(\mathbb{F})$ formado pelas sequências quase nulas, isto é, sequências que possuem apenas uma quantidade finita de termos não nulos (também denotado por $\mathbb{F}^{(\mathbb{N})}$ ou c_{00} na literatura).

1. Prove que a interseção de uma família arbitrária de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V .
2. Mostre que $W_1 + W_2$ é subespaço, e que $W_1 \cup W_2$ é subespaço se, e só se, $W_1 \subseteq W_2$ ou $W_2 \subseteq W_1$.
3. Prove que um conjunto S é LD se, e só se, algum de seus vetores é combinação linear dos outros.
4. Em $M_2(\mathbb{R})$, decida se $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ é LI.
5. Mostre que $\{1, \sqrt{2}\}$ é base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{Q}$.
6. Exiba uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e outra de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$. Compare os tamanhos.
7. Mostre que $c_0(\mathbb{F})$ é um subespaço vetorial de $\text{Seq}(\mathbb{F})$, mas que seus elementos não formam uma base para $\text{Seq}(\mathbb{F})$.
8. Seja $F \subset \text{Seq}(\mathbb{F})$ o conjunto formado por todas as sequências (a_n) que satisfazem a relação de recorrência $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que F é um subespaço vetorial e que $\dim(F) = 2$.
9. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado. Prove o Corolário da extração por descarte sucessivo (**sem usar o Axioma da Escolha** ou o Lema de Zorn) e conclua que V possui uma base.
10. Prove que quaisquer duas bases de um espaço vetorial V possuem a mesma cardinalidade.
11. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}$ e W um subespaço vetorial de V . Prove que $\dim(W) \leq \dim(V)$. Prove ainda que, se V possui dimensão finita e $\dim(W) = \dim(V)$, então $W = V$.
12. A segunda afirmação da questão anterior permanece válida se V tiver dimensão infinita? Justifique sua resposta.