

Álgebra Linear 2

Lista 2

Professor: Charles Almeida - charlesalmeida@mat.ufmg.br

1. Prove que $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$, o conjunto de todas as transformações lineares de U em V , é um espaço vetorial. Se U e V têm dimensão finita, calcule a dimensão de $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$.
2. Mostre que o produto de transformações lineares (isto é, a composição de transformações) não é, necessariamente, comutativo.
3. Sejam U e V espaços vetoriais, e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U , prove que $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ gera $\text{Im } T$.
4. Sejam $T : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^2$ e $S : \mathbb{F}^2 \rightarrow \mathbb{F}^3$ transformações lineares. Prove que a composta $S \circ T$ não é invertível. Dê um exemplo em que $T \circ S$ não é invertível.
5. Sejam A e B operadores lineares tais que $AB - BA$ comuta com A . Prove que $A^k B - BA^k = kA^{k-1}(AB - BA)$.
6. Seja $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau menor ou igual a 3. Exiba uma base de V contendo o polinômio $p(x) = x^3 - 2x + 1$.
7. Mostre, usando a definição de transformação linear e a aplicação de coordenadas, que $\dim M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$.
8. Seja $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } z - w = 0\}$. Calcule a dimensão de W e exiba uma base.
9. Dê um exemplo de um isomorfismo entre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^3$.
10. Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z, w) = (x - y, z + w, x - y + z + w)$. Determine bases de $\ker T$ e de $\text{Im } T$ e verifique a validade do Teorema do Núcleo e da Imagem.
11. Considere $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(p) = (p(0), p(1), p(2))$. Mostre que $\ker T = \{0\}$ e conclua que T é um isomorfismo.
12. Prove que, se $\dim V > \dim W$ (ambas finitas), então não existe transformação linear injetiva $T : V \rightarrow W$; e que, se $\dim V < \dim W$, não existe transformação linear sobrejetiva.
13. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador com $T \circ T = T$ (uma projeção) e $\dim V$ finita. Mostre que $V = \ker T \oplus \text{Im } T$. (*Sugestão: para $v \in V$, escreva $v = (v - T(v)) + T(v)$; depois use o Teorema do Núcleo e da Imagem para as dimensões.*)
14. Escreva a matriz de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + 2y, 3x)$, na base canônica, e determine a partir dela o posto e o núcleo de T .
15. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador e $\lambda \in \mathbb{K}$. Mostre que o autoespaço $\ker(T - \lambda \text{Id})$ é T -invariante, e que $\ker T$ e $\text{Im } T$ também o são. (*Definição: Um subespaço W é T -invariante se $T(W) \subseteq W$.*)