

Álgebra Linear 2

Lista 3

Professor: Charles Almeida - charlesalmeida@mat.ufmg.br

Orientação geral

Esta lista acompanha o estudo de operadores lineares, autovalores, diagonalização, polinômio minimal, decomposição de Fitting, operadores nilpotentes e forma de Jordan. As definições abaixo são incluídas para fixar a notação utilizada nos exercícios.

1. Operadores e subespaços invariantes

Definição – Operador linear

Um **operador linear** em V é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$. Denotamos por

$$\text{End}_{\mathbb{K}}(V) = \{T : V \rightarrow V; T \text{ linear}\}.$$

Definição – Subespaço T -invariante

Um subespaço $W \subseteq V$ é **T -invariante** se

$$T(W) \subseteq W.$$

Isto é, $w \in W$ implica $T(w) \in W$.

Definição – Núcleo e imagem

Para $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$,

$$\ker T = \{v \in V : T(v) = 0\}, \quad \text{Im } T = \{T(v) : v \in V\}.$$

Definição – Potências de um operador

Definimos

$$T^0 = \text{Id}, \quad T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ vezes}} \quad (n \geq 1).$$

1. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$.
 - a) Prove que $\ker T$ e $\text{Im } T$ são subespaços T -invariantes.
 - b) Prove que $\ker(T^n)$ e $\text{Im}(T^n)$ são T -invariantes para todo $n \geq 1$.
 - c) Mostre que, se W é T -invariante, então a restrição $T|_W : W \rightarrow W$ é um operador linear.

2. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Mostre que

$$V = \ker T \oplus \text{Im } T$$

não vale em geral. Dê um exemplo explícito de um operador para o qual a igualdade falha.

3. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que $T^2 = T$. Prove que

$$V = \ker T \oplus \text{Im } T.$$

4. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tal que

$$T^2 = -\text{Id}.$$

- a) Prove que T é invertível e determine T^{-1} .
- b) Prove que, se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, então T não possui autovalores reais.
- c) Suponha agora $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ e que V possua um subespaço T -invariante não trivial. Determine o polinômio minimal de T .
- d) Prove que $\dim_{\mathbb{Q}} V \geq 4$.

2. Mudança de base e semelhança

Definição – Matriz de um operador

Se $\mathcal{B}$ é uma base de V e $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$, denotamos por $[T]_{\mathcal{B}}$ a matriz de T na base $\mathcal{B}$.

Definição – Matriz de mudança de base

Se $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ e $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ são bases de V , a matriz de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$ é

$$P = \begin{bmatrix} [c_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [c_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$[v]_{\mathcal{B}} = P[v]_{\mathcal{C}}.$$

Definição – Matrizes semelhantes

Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ são **semelhantes** se existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

5. Sejam $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C} = ((1, 1), (1, -1))$. Considere

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Determine a matriz P de mudança de base de $\mathcal{C}$ para $\mathcal{B}$.
b) Calcule P^{-1} .
c) Determine $[T]_{\mathcal{C}}$.
6. Prove que a relação “ser semelhante” é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{K})$.
7. Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. Mostre que A e A^t são semelhantes quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
8. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prove que não existe matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

3. Autovalores e polinômio característico

Definição – Autovalor e autovetor

Um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ é um **autovalor** de $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ se existe $v \neq 0$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Nesse caso, v é um **autovetor** associado a λ .

Definição – Autoespaço

O **autoespaço** associado a λ é

$$E_{\lambda}(T) = \ker(T - \lambda \text{Id}).$$

Definição – Polinômio característico

Se $\dim V = n$ e $A = [T]_{\mathcal{B}}$, definimos

$$p_T(x) = \det(xI_n - A).$$

Observação

A definição acima não depende da base escolhida. De fato, se $B = P^{-1}AP$, então

$$\det(xI - B) = \det(P^{-1}(xI - A)P) = \det(xI - A).$$

9. Prove as equivalências

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff \ker(T - \lambda \text{Id}) \neq \{0\}$$

e, quando $\dim V < \infty$,

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff T - \lambda \text{Id não é invertível.}$$

10. Prove que o polinômio característico não depende da base escolhida.

11. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine:

- a) $p_A(x)$;
- b) os autovalores;
- c) os autoespaços correspondentes;
- d) a dimensão de cada autoespaço;
- e) se A é diagonalizável.

12. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine o polinômio característico, todos os autoespaços e uma base de autovetores.

13. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule o polinômio característico.
- b) Determine o único autovalor.
- c) Determine o autoespaço.
- d) Prove que A não é diagonalizável.

14. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine o polinômio característico, os autoespaços e diga se A é diagonalizável.

15. Seja A uma matriz 3×3 tal que

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

- a) Prove que A é invertível.
- b) Determine A^{-1} como um polinômio em A .

4. Diagonalização

Definição – Matriz diagonalizável

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é **diagonalizável** se existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ é diagonal. Um operador T é diagonalizável se sua matriz em alguma base é diagonal.

Definição – Multiplicidades algébrica e geométrica

Se λ é uma raiz de $p_T(x)$, sua **multiplicidade algébrica** é sua multiplicidade como raiz de p_T . Sua **multiplicidade geométrica** é

$$m_g(\lambda) = \dim E_\lambda(T).$$

16. Prove que, para todo autovalor λ ,

$$1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda).$$

17. Prove que $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$ é diagonalizável se, e somente se, V possui uma base formada por autovetores de T .

18. Prove que, se T possui $n = \dim V$ autovalores distintos, então T é diagonalizável.

19. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determine as multiplicidades algébricas e geométricas de todos os autovalores e conclua se A é diagonalizável.

20. Encontre uma matriz P tal que

$$P^{-1}AP$$

seja diagonal para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Polinômios de operadores e polinômio minimal

Definição – Polinômio de um operador

Se

$$q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \in \mathbb{K}[x],$$

definimos

$$q(T) = a_0\text{Id} + a_1T + \cdots + a_mT^m.$$

Definição – Polinômio anulador

Um polinômio $q \in \mathbb{K}[x]$ é um **polinômio anulador** de T se

$$q(T) = 0.$$

Definição – Polinômio minimal

O **polinômio minimal** de T , denotado por $m_T(x)$, é o polinômio mônico de menor grau tal que

$$m_T(T) = 0.$$

21. Se $q(T) = 0$ e λ é um autovalor de T , prove que

$$q(\lambda) = 0.$$

Conclua que todo autovalor de T é raiz de todo polinômio anulador de T .

22. Prove que o polinômio minimal divide todo polinômio anulador de T .

23. Calcule o polinômio minimal das matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

24. Se $T^2 = -\text{Id}$, determine o polinômio minimal de T sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{Q}$.

Teorema de Cayley–Hamilton

Se p_T é o polinômio característico de T , então

$$p_T(T) = 0.$$

25. Use o teorema de Cayley–Hamilton para provar novamente o exercício sobre a matriz 3×3 cujo polinômio característico é

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda + 1.$$

6. Decomposição de Fitting e nilpotentes

Definição – Operador nilpotente

Um operador N é **nilpotente** se existe $r \geq 1$ tal que

$$N^r = 0.$$

O menor r com essa propriedade é chamado de **índice de nilpotência**.

26. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Prove que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$V = \ker(T^n) \oplus \text{Im}(T^n).$$

27. Na decomposição

$$V = \ker(T^n) \oplus \text{Im}(T^n),$$

mostre que a restrição de T a $\ker(T^n)$ é nilpotente e a restrição de T a $\text{Im}(T^n)$ é invertível.

Definição – Decomposição de Fitting

A decomposição

$$V = \ker(T^n) \oplus \text{Im}(T^n),$$

para n suficientemente grande, é chamada de **decomposição de Fitting**.

28. Determine a decomposição de Fitting de

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

29. Seja N nilpotente em um espaço de dimensão n . Prove que o único autovalor de N é 0.

7. Operadores nilpotentes e cadeias de Jordan

Definição – Cadeia de Jordan

Se N é nilpotente e

$$v, Nv, N^2v, \dots, N^{r-1}v$$

são linearmente independentes, dizemos que esses vetores formam uma **cadeia de Jordan** para N .

Definição – Bloco de Jordan

O bloco de Jordan de tamanho r associado ao autovalor λ é

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Definição – Forma de Jordan

Uma matriz está na **forma de Jordan** se é bloco diagonal, com blocos da forma $J_r(\lambda)$.

30. Determine a forma de Jordan de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine também uma base de Jordan.

31. Considere

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine:

- a) o índice de nilpotência;
- b) $\dim \ker N$;
- c) $\dim \ker N^2$;
- d) a forma de Jordan;
- e) uma base de Jordan.

32. Se N é nilpotente e

$$d_k = \dim \ker N^k,$$

prove que

$$d_k - d_{k-1}$$

é o número de blocos de Jordan de tamanho pelo menos k .

33. Use as dimensões

$$\dim \ker N = 3, \quad \dim \ker N^2 = 5, \quad \dim \ker N^3 = 6$$

para determinar os tamanhos dos blocos de Jordan de um operador nilpotente N em dimensão 6.

8. Forma de Jordan: exercícios de cálculo

34. Calcule a forma de Jordan da matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine também uma base de Jordan.

35. Calcule a forma de Jordan da matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

36. Seja

$$T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

dada por

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_3 + x_4, 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4, x_3 + x_4, 3x_4 - x_3).$$

- a) Escreva a matriz de T na base canônica.
- b) Determine o polinômio característico.
- c) Determine os autovalores e autoespaços.
- d) Calcule a forma de Jordan.
- e) Encontre uma base de Jordan.
- f) Determine os fatores invariantes de T .

9. Questões de síntese

37. Seja $T \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Suponha que o polinômio característico se decomponha em fatores lineares distintos:

$$p_T(x) = \prod_{i=1}^r (x - \lambda_i)^{m_i}.$$

Explique quais informações sobre a diagonalização de T podem ser obtidas apenas a partir do polinômio característico e quais informações exigem o cálculo dos autoespaços.

38. Seja T um operador diagonalizável. Prove que todo subespaço T -invariante possui um complemento T -invariante.

39. Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Explique por que todo operador em dimensão finita possui forma de Jordan. Quais são os dados necessários para determinar essa forma a partir de T ?

40. Se T possui polinômio minimal

$$m_T(x) = (x - 2)^3(x + 1),$$

determine os possíveis tamanhos dos blocos de Jordan associados aos autovalores 2 e -1 . Explique o que o expoente de cada fator informa sobre os blocos.

41. Considere um operador T em dimensão 5 sobre $\mathbb{C}$ tal que

$$\dim \ker(T - 2I) = 3, \quad \dim \ker(T - 2I)^2 = 4, \quad \dim \ker(T - 2I)^3 = 5.$$

Determine os tamanhos dos blocos de Jordan associados a $\lambda = 2$.

42. Determine todos os possíveis tipos de Jordan, a menos de permutação dos blocos, para um operador em dimensão 4 que possui apenas o autovalor $\lambda = 1$ e satisfaz

$$\dim \ker(T - I) = 2.$$

43. Para cada uma das afirmações abaixo, determine se é verdadeira ou falsa e justifique.

- a) Todo operador com polinômio característico completamente fatorado é diagonalizável.
- b) Todo operador com n autovalores distintos em dimensão n é diagonalizável.
- c) Se T é diagonalizável, então seu polinômio minimal não possui raízes repetidas.
- d) Se o polinômio minimal de T é $(x - \lambda)^r$, então T possui apenas um autovalor.
- e) Se T é nilpotente, então T é diagonalizável.
- f) Se T é diagonalizável e nilpotente, então $T = 0$.