

Álgebra Linear 2

Lista de forma de Jordan

Referente às Aulas 8, 9 e 11: existência e cálculo da forma de Jordan, contagem de blocos, potências de matrizes e forma de Jordan real.

Convenções. Usamos as convenções das notas de aula.

- $p_A(x) = \det(xI - A)$ e $m_a(\lambda)$ é a multiplicidade algébrica de λ .
- $J_k(\lambda)$ é o bloco $k \times k$ com λ na diagonal e 1's *acima* da diagonal. Numa cadeia, o primeiro vetor é o aniquilado por $N = A - \lambda I$: a ordem é $N^{k-1}v, \dots, Nv, v$.
- $d_j = \dim \ker(A - \lambda I)^j$ e $b_j = d_j - d_{j-1}$ é o número de blocos de λ de tamanho $\geq j$; o número de blocos de tamanho exatamente j é $N_j = 2d_j - d_{j-1} - d_{j+1}$.
- $\text{Rot}(a, b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$; se $z = u + iw$ é autovetor de $a + bi$ (com $b > 0$), usa-se a base (w, u) .

As respostas estão no final. A matriz P não é única: se a sua for diferente, confira se $AP = PJ$ coluna por coluna.

1 Calculando a forma de Jordan

Nos Exercícios 1 a 8, para cada matriz A :

- calcule p_A e os autovalores;
- para cada autovalor λ , calcule $d_1, d_2, \dots$ até estabilizar;
- determine a forma de Jordan J ;
- encontre P invertível com $P^{-1}AP = J$, conferindo $AP = PJ$ coluna por coluna.

1. (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; (c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. ((c): Moura, Ex. 6.5.1(1))

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Compare com o Exercício 3: nos dois casos há um autovalor repetido. Explique, usando d_1 , por que uma das matrizes é diagonalizável e a outra não. (Moura, Ex. 6.5.1(13))

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (Moura, Ex. 6.5.1(28))

7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (Moura, Ex. 6.5.1(30))

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

9. O operador derivação $D(p) = p'$ em $P_3(\mathbb{R})$ é representado, na base $\{1, x, x^2, x^3\}$, pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine a forma de Jordan de A e uma base de Jordan de $P_3(\mathbb{R})$ formada por polinômios. (Hoffman e Kunze, Ex. 7.3.5)

10. Determine a forma de Jordan da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aqui não é preciso encontrar P : basta calcular os d_j .

(Hoffman e Kunze, Ex. 7.3.6)

2 Forma de Jordan a partir de invariantes

11. Seja $A \in M_5(\mathbb{C})$ com $p_A(x) = (x-2)^3(x+7)^2$ e $m_A(x) = (x-2)^2(x+7)$. Determine a forma de Jordan de A . (Hoffman e Kunze, Ex. 7.3.3)

12. Seja $A \in M_6(\mathbb{C})$ com $p_A(x) = (x+2)^4(x-1)^2$.

(a) Liste todas as formas de Jordan possíveis para A , a menos da ordem dos blocos. Quantas são?

- (b) Para cada uma, escreva m_A .
 (c) Quais delas não ficam determinadas pelo par (p_A, m_A) ?

(adaptado de Hoffman e Kunze, Ex. 7.3.4)

13. Determine a forma de Jordan em cada caso.

- (a) $A \in M_7(\mathbb{C})$ é nilpotente, com $d_1 = 3, d_2 = 5, d_3 = 6$ e $d_4 = 7$.
 (b) $A \in M_8(\mathbb{C})$ tem $p_A(x) = (x - 5)^8$, $\text{posto}(A - 5I) = 5$, $\text{posto}(A - 5I)^2 = 2$ e $\text{posto}(A - 5I)^3 = 0$.

14. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Mostre que as três têm o mesmo polinômio característico e o mesmo polinômio minimal.
 (b) Calcule d_1 para cada uma e determine suas formas de Jordan.
 (c) Decida quais pares são semelhantes.

3 Potências de matrizes

15. (a) Escrevendo $J_k(\lambda) = \lambda I + N$ e usando o binômio de Newton, calcule $J_2(\lambda)^n$ e $J_3(\lambda)^n$.
 (b) Calcule $J_3(2)^{10}$ e $J_3(-1)^{2026}$.
16. (a) Seja A a matriz do Exercício 1(a). Usando $A = PJP^{-1}$, calcule A^n para todo $n \geq 0$ e, em seguida, A^{10} .
 (b) Seja A a matriz do Exercício 3. Mostre que $(A - 2I)^2 = 0$ e use isso para calcular A^n sem encontrar P .
17. Seja A a matriz do Exercício 4. Calcule A^n para todo $n \geq 0$ e confira a fórmula para $n = 0$ e $n = 1$.
18. (Recorrências lineares.)
 (a) A sequência (x_n) satisfaz $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 4$. Escreva $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, calcule a forma de Jordan de M e encontre uma fórmula fechada para x_n .
 (b) A sequência (y_n) satisfaz $y_{n+3} = 3y_{n+2} - 3y_{n+1} + y_n$, com $y_0 = 0, y_1 = 1$ e $y_2 = 4$. Mostre que a matriz da recorrência é a matriz do Exercício 2 e encontre uma fórmula fechada para y_n .
19. Uma partícula ocupa um de três estados. A cada passo, a distribuição de probabilidades $v_n \in \mathbb{R}^3$ é atualizada por $v_{n+1} = Mv_n$, onde

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Verifique que a soma de cada coluna de M é 1.

- (b) Determine a forma de Jordan de M e uma matriz P .
- (c) Calcule M^n para todo $n \geq 0$.
- (d) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ e interprete o resultado.

4 Forma de Jordan real

20. (a) Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determine a forma de Jordan real de A e P com $P^{-1}AP = \text{Rot}(1, 1)$.
 Escrevendo $\text{Rot}(1, 1) = \sqrt{2} \text{Rot}\left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4}\right)$, calcule A^8 e A^{2026} .
- (b) Seja $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}$. Determine a forma de Jordan real de B , uma matriz P real correspondente e calcule B^{2026} . (Moura, Ex. 6.5.1(15))

Respostas

1. (a) $p_A = (x-2)^2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$; $J = J_2(2)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b) $p_A = (x-3)^2$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$; $J = J_2(3)$,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) $p_A = (x-3)(x-4)$; A é diagonalizável, $J = \text{diag}(3, 4)$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $p_A = (x-1)^3$; $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$; $J = J_3(1)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. $p_A = (x-2)^3$; $d_1 = 2$, $d_2 = 3$; $J = J_2(2) \oplus J_1(2)$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $p_A = (x+1)^2(x-3)$; para $\lambda = -1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 2$; $J = J_2(-1) \oplus J_1(3)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $p_A = (x-1)^2(x-7)$; para $\lambda = 1$, $d_1 = 2$. A é diagonalizável, $J = \text{diag}(1, 1, 7)$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

No Exercício 3, ao contrário, $d_1 = 2 < 3 = m_a(2)$.

6. $p_A = (x+1)^2(x-3)^2$; para cada autovalor, $d_1 = 1$ e $d_2 = 2$; $J = J_2(-1) \oplus J_2(3)$,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. $p_A = (x-1)(x-2)(x-3)^2$; para $\lambda = 3, d_1 = 1, d_2 = 2; J = J_1(1) \oplus J_1(2) \oplus J_2(3)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. $p_A = (x-2)^4; d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 4; J = J_3(2) \oplus J_1(2)$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9. $d_j = j$ para $j \leq 4; J = J_4(0)$. Base de Jordan: $\{6, 6x, 3x^2, x^3\}$, isto é, a cadeia $D^3(x^3), D^2(x^3), D(x^3), x^3$.

10. $p_A = (x-2)^5(x+1)$; para $\lambda = 2, d_1 = 2, d_2 = 3, d_3 = 4, d_4 = 5; J = J_4(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(-1)$.

11. $J = J_2(2) \oplus J_1(2) \oplus J_1(-7) \oplus J_1(-7)$.

12. (a) São $5 \cdot 2 = 10$; para $\lambda = -2$, os tamanhos dos blocos são $4; 3+1; 2+2; 2+1+1; 1+1+1+1$; para $\lambda = 1$, são 2 ou $1+1$. (b) $m_A = (x+2)^a(x-1)^b$, onde a é o tamanho do maior bloco de -2 e b o do maior bloco de 1 . (c) Os tamanhos $2+2$ e $2+1+1$ para $\lambda = -2$ dão o mesmo $a = 2$; assim, para cada uma das duas escolhas em $\lambda = 1$, há duas formas com o mesmo par (p_A, m_A) .

13. (a) $N_1 = N_2 = N_4 = 1, N_3 = 0; J = J_4(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$. (b) $d_1 = 3, d_2 = 6, d_3 = 8; J = J_3(5) \oplus J_3(5) \oplus J_2(5)$.

14. (a) As três têm $p = x^4$ e $m = x^2$. (b) $d_1(A) = 2, d_1(B) = 3, d_1(C) = 2$; logo $A \sim C \sim J_2(0) \oplus J_2(0)$ e $B \sim J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$. (c) Apenas A e C são semelhantes.

15. (a) $J_2(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$ e $J_3(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

(b) $J_3(2)^{10} = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 11520 \\ 0 & 1024 & 5120 \\ 0 & 0 & 1024 \end{pmatrix}$ e $J_3(-1)^{2026} = \begin{pmatrix} 1 & -2026 & 2051325 \\ 0 & 1 & -2026 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16. (a) $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} n+2 & n \\ -n & 2-n \end{pmatrix}$ e $A^{10} = \begin{pmatrix} 6144 & 5120 \\ -5120 & -4096 \end{pmatrix}$. (b) $A^n = 2^n I + n2^{n-1}(A - 2I)$, com $A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Escrevendo $s = (-1)^n$ e $t = 3^n$,

$$A^n = \begin{pmatrix} t & t-s & s-t \\ s-t & (2-n)s-t & (n-1)s+t \\ s-t & (1-n)s-t & ns+t \end{pmatrix}.$$

18. (a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$, $J = J_2(2)$ e $x_n = (n+1)2^n$. (b) $y_n = n^2$.

19. (b) $J = J_2(\frac{1}{2}) \oplus J_1(1)$,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$M^n = \begin{pmatrix} 2^{-n} & 0 & 0 \\ n2^{-n-1} & 2^{-n} & 0 \\ 1 - (n+2)2^{-n-1} & 1 - 2^{-n} & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) O limite é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

o que significa que, qualquer que seja a distribuição inicial, a partícula termina no terceiro estado com probabilidade 1.

20. (a) $p_A = x^2 - 2x + 2$, autovalores $1 \pm i$; $z = (2+i, 1)$, $u = (2, 1)$, $w = (1, 0)$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^8 = 16I \text{ e } A^{2026} = 2^{1012}A^2 = 2^{1013} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(b) $p_B = (x-2)(x^2+1)$; forma real $J_1(2) \oplus \text{Rot}(0, 1)$, com

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(colunas $v = (1, 0, 2)$, $w = (1, 1, 0)$, $u = (3, 3, 5)$, onde $z = u + iw$ é autovetor de i). Como $\text{Rot}(0, 1)^{2026} = \text{Rot}(0, 1)^2 = -I$, escrevendo $t = 2^{2026}$,

$$B^{2026} = P \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} t & -(t+1) & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2(t+1) & -2(t+1) & -1 \end{pmatrix}.$$