

Álgebra Linear 2

Lista de operadores adjuntos

Referente à Aula 13: espaço dual, teorema de Riesz, operador adjunto, operadores autoadjuntos e unitários.

Salvo menção em contrário, V tem dimensão finita n sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e o produto interno é linear na primeira entrada e conjugado-linear na segunda. Em $\mathbb{K}^n$, “produto usual” significa $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i \bar{v}_i$. Os exercícios marcados com $(\star)$ são mais desafiadores. Respostas dos exercícios de cálculo ao final.

1 Espaço dual e base dual

- Em $\mathbb{R}^3$, considere a base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ com $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$.
 - Determine a base dual $\{f_1, f_2, f_3\}$.
 - Escreva $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ como combinação linear de f_1, f_2, f_3 .
 - Calcule $f_1(v)$, $f_2(v)$ e $f_3(v)$ para $v = (4, -1, 2)$ e verifique que esses números são as coordenadas de v na base β .
- (Regra de Simpson.)** Em $P_2(\mathbb{R})$, considere os funcionais $g_1(p) = p(-1)$, $g_2(p) = p(0)$ e $g_3(p) = p(1)$.
 - Encontre polinômios $p_1, p_2, p_3 \in P_2(\mathbb{R})$ tais que $g_i(p_j) = \delta_{ij}$.
 - Conclua que $\{p_1, p_2, p_3\}$ é base de $P_2(\mathbb{R})$, que $\{g_1, g_2, g_3\}$ é base de $P_2(\mathbb{R})^*$ e que a segunda é a base dual da primeira.
 - Usando a expansão $f = \sum_i f(p_i) g_i$ do teorema da base dual, mostre que para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \frac{1}{3} p(-1) + \frac{4}{3} p(0) + \frac{1}{3} p(1).$$

- Verifique que a fórmula do item (c) continua válida para $p = x^3$, mas falha para $p = x^4$.
- Seja $f \in V^*$ não nulo.
 - Mostre que $\dim \ker f = n - 1$.
 - Se $g \in V^*$ satisfaz $\ker f \subseteq \ker g$, mostre que existe $c \in \mathbb{K}$ com $g = cf$. *Sugestão:* fixe v_0 com $f(v_0) = 1$ e escreva $v = (v - f(v)v_0) + f(v)v_0$.
 - (Anulador sem produto interno.)** Para um subespaço $W \subseteq V$, seja $W^0 = \{f \in V^* : f(w) = 0 \forall w \in W\}$.
 - Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de W , completada a uma base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V , e seja $\{f_1, \dots, f_n\}$ a base dual. Mostre que $W^0 = \text{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ e conclua que $\dim W^0 = n - \dim W$.
 - Em $\mathbb{R}^3$, determine W^0 para $W = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

5. **(A transposta de um operador.)** Dado $T: V \rightarrow V$ linear, defina $T^t: V^* \rightarrow V^*$ por $T^t(f) = f \circ T$.
- (a) Mostre que T^t é linear, que $(ST)^t = T^t S^t$ e que $\text{Id}^t = \text{Id}$.
 - (b) Seja β base de V , β^* sua base dual e $A = [T]_\beta$. Mostre que $[T^t]_{\beta^*} = A^T$, em qualquer base.
Sugestão: calcule $(T^t f_i)(v_j)$.
 - (c) Mostre que $\ker T^t = (\text{Im } T)^0$, com a notação do Exercício 4.

2 O teorema de representação de Riesz

6. Em cada caso, encontre o vetor w tal que $f(v) = \langle v, w \rangle$ para todo v .
- (a) $V = \mathbb{C}^2$ com o produto usual e $f(z_1, z_2) = (1+i)z_1 + 2z_2$.
 - (b) $V = \mathbb{R}^2$ com $\langle u, v \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$ e $f(x, y) = x + y$. Compare com o vetor obtido para o produto usual de $\mathbb{R}^2$.
 - (c) $V = P_2(\mathbb{R})$ com $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 pq \, dx$ e $f(p) = p'(0)$.
 - (d) $V = P_2(\mathbb{R})$ com o mesmo produto e $f(p) = p(1)$.
- Sugestão para (c) e (d):* use a base ortogonal $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ da Aula 12.
7. Seja $\Phi: V \rightarrow V^*$, $\Phi(w) = \langle \cdot, w \rangle$.
- (a) Mostre que $\Phi(w_1 + w_2) = \Phi(w_1) + \Phi(w_2)$ e $\Phi(aw) = \bar{a} \Phi(w)$.
 - (b) Mostre que, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base ortonormal, então $\{\Phi(e_1), \dots, \Phi(e_n)\}$ é a sua base dual.
 - (c) Dê um exemplo, em $\mathbb{R}^2$ com algum produto interno, de uma base β tal que $\Phi(\beta)$ não é a base dual de β .
8. **(*) (Riesz falha em dimensão infinita.)** Seja $P(\mathbb{R})$ o espaço de todos os polinômios reais, com $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq \, dx$, e seja $f(p) = p(0)$. Mostre que não existe $w \in P(\mathbb{R})$ com $f(p) = \langle p, w \rangle$ para todo p . *Sugestão:* aplique a suposta identidade a $p(x) = xw(x)$.

3 O operador adjunto

9. Em $\mathbb{C}^2$ com o produto usual, seja $T(z_1, z_2) = (z_1 + iz_2, (2-i)z_1)$.
- (a) Escreva a matriz de T na base canônica.
 - (b) Determine $T^*(z_1, z_2)$.
 - (c) Verifique diretamente que $\langle Te_1, e_2 \rangle = \langle e_1, T^*e_2 \rangle$.
 - (d) T é autoadjunto?
10. Em $P_1(\mathbb{R})$ com $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq \, dx$, seja $D(p) = p'$.
- (a) Aplique Gram-Schmidt a $\{1, x\}$ para obter uma base ortonormal $\beta = \{e_1, e_2\}$.
 - (b) Calcule $[D]_\beta$ e $[D^*]_\beta$.
 - (c) Mostre que $D^*(a + bx) = 3(2a + b)(2x - 1)$.
 - (d) Verifique que $\langle Dp, q \rangle = \langle p, D^*q \rangle$ para $p = q = x$.
 - (e) Compare com o Exemplo guiado 1 da Aula 13, em que o intervalo era $[-1, 1]$. O que essa comparação mostra sobre a dependência de D^* em relação ao produto interno?
11. Em $M_n(\mathbb{R})$, considere o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^T A)$. Fixada $M \in M_n(\mathbb{R})$, determine o adjunto de cada operador:

- (a) $L_M(X) = MX$;
 (b) $R_M(X) = XM$;
 (c) $\tau(X) = X^T$; mostre ainda que τ é autoadjunto e ortogonal;
 (d) $\text{ad}_M(X) = MX - XM$; conclua que ad_M é autoadjunto quando M é simétrica.
- 12. (Adjunto em base qualquer.)** Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V , não necessariamente ortonormal, e seja G a matriz de Gram, $G_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$. Indique por $[u]$ o vetor de coordenadas de u na base β .
- (a) Mostre que $\langle u, v \rangle = [v]^* G [u]$ e que G é invertível.
 (b) Se $A = [T]_\beta$, mostre que $[T^*]_\beta = G^{-1} A^* G$.
 (c) Recupere o Teorema 3.3 da Aula 13 como caso particular.
 (d) Em $\mathbb{R}^2$, considere $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + 2u_2 v_2$. Mostre que é um produto interno e, para $T(x, y) = (x + y, y)$, calcule $T^*(x, y)$. Compare $[T^*]_{\text{can}}$ com $[T]_{\text{can}}^T$.
- 13. (O adjunto visto no dual.)** Com as notações dos Exercícios 5 e 7, mostre que

$$T^* = \Phi^{-1} \circ T^t \circ \Phi.$$

Em seguida, use o Exercício 7(b) e o Exercício 5(b) para obter uma nova demonstração de que $[T^*]_\beta = \overline{[T]_\beta}^T$ quando β é ortonormal. Explique de onde vem a conjugação.

- 14.** Seja $T: V \rightarrow V$ linear.
- (a) Mostre que T^*T é autoadjunto e que $\langle T^*T v, v \rangle \geq 0$ para todo v .
 (b) Mostre que $\ker(T^*T) = \ker T$. *Sugestão:* calcule $\langle T^*T v, v \rangle$.
 (c) Conclua que $\text{posto}(T^*T) = \text{posto } T$.
 (d) Mostre que $V = \ker T \oplus \text{Im } T^*$, com as duas parcelas ortogonais.
- 15. (Subespaços invariantes.)** Seja $W \subseteq V$ um subespaço invariante por T , isto é, $T(W) \subseteq W$.
- (a) Mostre que $W^\perp$ é invariante por T^* .
 (b) Conclua que, se T é autoadjunto, $W^\perp$ é invariante por T .
 (c) Mostre que, se T é unitário, então $T(W) = W$, $T^*(W) = W$ e $W^\perp$ é invariante por T .
- Este exercício será usado na demonstração do teorema espectral.

4 Operadores autoadjuntos e unitários

- 16.** Determine todos os $a, b \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz é

- (a) hermitiana: $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1+i & b \end{pmatrix}$;
 (b) unitária: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

- 17. (Reflexões de Householder.)** Seja $u \in \mathbb{R}^n$ com $\|u\| = 1$ e $H = I - 2uu^T$.
- (a) Mostre que H é simétrica e ortogonal.
 (b) Mostre que $Hu = -u$ e que $Hw = w$ para todo $w \perp u$. Interprete geometricamente.

- (c) Calcule H para $u = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.
- (d) Mais geralmente, considere as três condições sobre um operador T : (i) T é autoadjunto, (ii) T é unitário, (iii) $T^2 = \text{Id}$. Mostre que quaisquer duas delas implicam a terceira.
- 18. (Projeções ortogonais.)** Seja $P: V \rightarrow V$ linear com $P^2 = P$.
- (a) Mostre que $V = \text{Im } P \oplus \ker P$.
- (b) Mostre que P é autoadjunto se, e somente se, $\ker P \perp \text{Im } P$.
- (c) Em $\mathbb{R}^2$ com o produto usual, verifique que $P(x, y) = (x + y, 0)$ satisfaz $P^2 = P$ e decida se P é autoadjunto.
- 19. (★)** Seja V um espaço com produto interno sobre $\mathbb{C}$.
- (a) Verifique a identidade de polarização
- $$4\langle Tu, v \rangle = \sum_{k=0}^3 i^k \langle T(u + i^k v), u + i^k v \rangle.$$
- (b) Conclua que, se $\langle Tv, v \rangle = 0$ para todo v , então $T = 0$.
- (c) Mostre que o item (b) é falso sobre $\mathbb{R}$, usando a rotação de 90° em $\mathbb{R}^2$.
- (d) Conclua que, sobre $\mathbb{C}$, T é autoadjunto se, e somente se, $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ para todo v . *Sugestão:* aplique (b) a $T - T^*$. Compare com a Observação 4.3 da Aula 13.
- 20.** Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- (a) Mostre que $\det(A^*) = \overline{\det A}$.
- (b) Se A é hermitiana, mostre que $\det A \in \mathbb{R}$ e que todo autovalor de A é real.
- (c) Se A é unitária, mostre que $|\det A| = 1$. Se, além disso, A é real, conclua que $\det A = \pm 1$.
- (d) Dê um exemplo de matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ com $\det A = 1$ que não seja ortogonal.

Respostas dos exercícios de cálculo

- 1.** (a) $f_1 = x - y$, $f_2 = y - z$, $f_3 = z$. (b) $f = f_1 + 3f_2 + 6f_3$. (c) $(5, -3, 2)$, e de fato $5v_1 - 3v_2 + 2v_3 = (4, -1, 2)$.
- 2.** (a) $p_1 = \frac{1}{2}x(x - 1)$, $p_2 = 1 - x^2$, $p_3 = \frac{1}{2}x(x + 1)$. (d) Para x^3 , ambos os lados valem 0; para x^4 , o lado esquerdo vale $\frac{2}{5}$ e o direito vale $\frac{2}{3}$.
- 4.** (b) $W^0 = \text{span}\{f\}$, com $f(x, y, z) = x - y + z$.
- 6.** (a) $w = (1 - i, 2)$. (b) $w = (\frac{1}{2}, 1)$; no produto usual, $w = (1, 1)$. (c) $w = \frac{3}{2}x$. (d) $w = \frac{1}{4}(15x^2 + 6x - 3)$.
- 9.** (a) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix}$. (b) $T^*(z_1, z_2) = (z_1 + (2 + i)z_2, -iz_1)$. (c) Ambos valem $2 - i$. (d) Não.
- 10.** (a) $e_1 = 1$, $e_2 = \sqrt{3}(2x - 1)$. (b) $[D]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $[D^*]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. (d) Ambos valem $\frac{1}{2}$.
- 11.** (a) $L_M^* = L_{M^\top}$. (b) $R_M^* = R_{M^\top}$. (c) $\tau^* = \tau$. (d) $\text{ad}_M^* = \text{ad}_{M^\top}$.
- 12.** (d) $\langle u, u \rangle = (u_1 + u_2)^2 + u_2^2$; $T^*(x, y) = (-y, x + 2y)$, isto é, $[T^*]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [T]_{\text{can}}^\top$.
- 16.** (a) $a = 1 - i$ e $b \in \mathbb{R}$. (b) $a = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$ e $b = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\theta}$, com $\theta \in \mathbb{R}$.

17. (c) $H = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$

18. (c) $P^2 = P$, mas $\ker P = \text{span}\{(1, -1)\}$ e $\text{Im } P = \text{span}\{(1, 0)\}$ não são ortogonais; logo P não é autoadjunto.