

Sejam $\mathbb{K}$ um corpo qualquer e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Um **operador linear** é uma transformação linear $T : V \rightarrow V$.

Se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ e $\mathcal{B}$ é uma base de V , então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ pertence à $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$; muitas informações sobre T podem ser obtidas através de cálculos sobre a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$. Para obter tal feito é conveniente que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja a mais simples possível. Além das matrizes múltiplas da identidade λI_n , com $\lambda \in \mathbb{K}$, talvez as matrizes mais simples sejam as matrizes diagonais

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}.$$

De fato, se $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$, então $[T]_{\mathcal{B}} = D$ se, e somente se, $Tv_i = c_i v_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso, temos por exemplo,

$$\ker(T) = \langle v_i \mid Tv_i = c_i v_i, c_i = 0 \rangle \text{ e}$$

$$\text{Im}(T) = \langle v_i \mid Tv_i = c_i v_i, c_i \neq 0 \rangle,$$

ou seja, informações importantes sobre T podem ser obtidas a partir de D . Sendo assim, caso $[T]_{\mathcal{B}}$ não seja diagonal, seria interessante determinar uma base $\mathcal{C}$ tal que $[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$ seja diagonal, onde P é uma matriz invertível. O problema é que nem toda matriz é semelhante a uma matriz diagonal, como é o caso de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Mudança de base como isomorfismo

Até agora, vimos que a matriz de um operador linear depende da base escolhida. Vamos entender *como* as matrizes de duas transformações lineares se relacionam.

Sejam $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ e $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ duas bases de V . Definimos o

operador linear

$$\Phi : V \rightarrow V$$

que envia cada vetor escrito na base $\mathcal{C}$ para o *mesmo vetor* escrito na base $\mathcal{B}$. Ou seja, Φ é o operador identidade em V , mas visto em coordenadas diferentes. Em particular, Φ é um isomorfismo.

A matriz de Φ na base $\mathcal{C}$ no domínio e $\mathcal{B}$ no contradomínio é exatamente a matriz de mudança de base:

$$P = [\Phi]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

As colunas de P são as coordenadas dos vetores de $\mathcal{C}$ escritas na base $\mathcal{B}$.

Como Φ é um isomorfismo, sua inversa Φ^{-1} corresponde à mudança de base inversa, e sua matriz é P^{-1} .

Agora seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ V & \xrightarrow{T} & V \end{array}$$

Isso significa que

$$\Phi \circ T = T \circ \Phi.$$

Passando para matrizes, obtemos

$$P [T]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B}} P.$$

Multiplicando à esquerda por P^{-1} , segue a relação fundamental

$$[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1} [T]_{\mathcal{B}} P.$$

Conclusão: duas matrizes representam o mesmo operador linear em bases diferentes se, e somente se, são semelhantes.

Exemplo 1. Considere $V = \mathbb{R}^2$, a base canônica

$$\mathcal{B} = \{e_1, e_2\},$$

e a base

$$\mathcal{C} = \{(1, 1), (1, -1)\}.$$

A matriz de mudança de base é

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

então a matriz de T na base $\mathcal{C}$ é

$$[T]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

Veremos no decorrer dessas notas que se $\mathbb{K}$ é algébricamente fechado, podemos determinar J uma matriz similar a $[T]_{\mathcal{B}}$ que, embora não seja diagonal, possui uma forma que facilita a obtenção de informações relevantes de T . Tal matriz é a conhecida **forma canônica de Jordan**.

Veremos a seguir alguns resultados e definições necessários para obter tal forma.

Definição 1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear.

1. Um **autovalor** de T é um elemento $\lambda \in \mathbb{K}$, tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com $T(v) = \lambda v$. Denotaremos os autovetores de T associados a λ por $\text{Aut}_T(\lambda)$.
2. Se λ é um autovalor de T , então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é dito **autovetor de T associado a λ** . Denotaremos por $\text{Aut}_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ , dito **autoespaço de λ** .

3. Suponha que $\dim_{\mathbb{K}} V = n < \infty$. Dizemos que T é **diagonalizável** se existe uma base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.

Observação 2. Dizer que T é diagonalizável é equivalente a dizer que existe uma base $\mathcal{B}$ formada por autovetores de T .

Exemplo 2. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear não injetivo, então 0 é um autovalor de T . De fato, como T não é injetivo, existe um vetor não nulo v em seu núcleo. Daí $T(v) = 0 = 0v$.

Conforme o exemplo a seguir mostra, alguns operadores lineares não possuem autovalores.

Exemplo 3. O operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, x)$ não possui autovalores. De fato, se existe λ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, então

$$\begin{cases} -y &= \lambda x \\ x &= \lambda y, \end{cases}$$

cujas únicas soluções são o vetor nulo.

A seguir veremos como determinar os autovalores de um operador linear.

Proposição 3. Se $T : V \rightarrow V$ é um operador linear onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de T se, e somente se, $\ker(\lambda I - T) \neq 0$.

Demonstração. Segue da definição de autovalor. □

Assim, nas condições da proposição anterior, sejam $\mathcal{B}$ uma base qualquer de V e $[\lambda I - T]_{\mathcal{B}}$ a matriz do operador linear $\lambda I - T$ nesta base. Segue que

$$\begin{aligned} \ker(\lambda I - T) \neq 0 &\Leftrightarrow [\lambda I - T]_{\mathcal{B}} \text{ não é invertível} \\ &\Leftrightarrow \det([\lambda I - T]_{\mathcal{B}}) = 0. \end{aligned}$$

Se $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, observe que $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ é um polinômio mônico de grau n . Sendo assim, λ é autovalor de T se, e somente se, λ é raiz de $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$. E mais, se $\mathcal{C}$ é outra base de V , sabemos que existe uma matriz invertível

$P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P$ (i.e. $[T]_{\mathcal{C}}$ e $[T]_{\mathcal{B}}$ são semelhantes) e sendo I_n a matriz identidade em $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, segue que

$$\begin{aligned} \det([xI - T]_{\mathcal{B}}) &= \det(xI_n - [T]_{\mathcal{B}}) \\ &= \det(xP^{-1}I_nP - P^{-1}[T]_{\mathcal{C}}P) \\ &= \det(P^{-1}(xI_n - [T]_{\mathcal{C}})P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(xI_n - [T]_{\mathcal{C}}) \det(P) \\ &= \det(xI_n - [T]_{\mathcal{C}}) \\ &= \det([xI - T]_{\mathcal{C}}), \end{aligned}$$

ou seja, $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ não depende da base escolhida, o que justifica a seguinte definição.

Definição 4. Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $\mathcal{B}$ uma base de V . Chamamos o polinômio $\det([xI - T]_{\mathcal{B}})$ de **polinômio característico** de T e o denotamos por $p_T(x)$.

Nas condições da definição anterior, se $\mathbb{K}$ é algébricamente fechado, então o polinômio característico de um operador T será da forma

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell},$$

com $\lambda_i \in \mathbb{K}$ e $r_i \geq 1$. Em particular, existirão autovalores para T .

O resultado a seguir caracteriza quando um operador é diagonalizável.

Teorema 5. *Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ os distintos autovalores de T . Então T é diagonalizável se, e somente se,*

$$V = \text{Aut}_T(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \text{Aut}_T(\lambda_\ell)$$

(equivalentemente, $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{\ell} \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$).

Exemplo 4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{C}$ é uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Fazendo os cálculos, temos $p_T(x) = (x+1)^2(x+2)$,

$$\text{Aut}_T(-1) = \langle (1, 0, 2), (0, 1, 2) \rangle \text{ e } \text{Aut}_T(-2) = \langle (1, -1, 1) \rangle.$$

Logo, pelo Teorema 5, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (0, 1, 2), (1, -1, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e T é diagonalizável.

Dado um autovalor λ de um operador T , veremos a seguir a relação entre $\dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda)$ com a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico $p_T(x)$.

Definição 6. Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e $p_T(x) = (x - \lambda)^m q(x)$, com $q(\lambda) \neq 0$, o polinômio característico de T e λ um autovalor de T .

1. O número m é chamado de **multiplicidade algébrica** de λ e denotado por $ma(\lambda)$.
2. Chamamos de **multiplicidade geométrica** de λ a dimensão do subespaço $\text{Aut}_T(\lambda)$ e indicamos tal número por $mg(\lambda)$.

Proposição 7. Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e λ um autovalor de T . Então $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$.

Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell}$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ são distintos. Segue da definição do polinômio característico que $\dim_{\mathbb{K}} V = n_1 + \cdots + n_\ell$; assim, pela proposição acima, temos que $\dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{\ell} \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i)$ se, e somente se, $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$ para cada i . Isso nos leva ao seguinte resultado.

Teorema 8. Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ os seus distintos autovalores. As seguintes condições são equivalentes.

1. T é diagonalizável.
2. $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{n_\ell}$, $n_i \geq 1$ e $mg(\lambda_i) = ma(\lambda_i)$, para cada $i = 1, \dots, \ell$.

$$3. \dim_{\mathbb{K}} V = \sum_{i=1}^{\ell} \dim_{\mathbb{K}} \text{Aut}_T(\lambda_i).$$

Agora, como prometido, veremos o que ocorre quando $[T]_{\mathcal{B}}$ não é diagonalizável.

Definição 9. Sejam V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial, $T : V \rightarrow V$ um operador linear e seja $W \subset V$ um subespaço de V . Se $T(w) \in W$, $\forall w \in W$, dizemos que W é um subespaço **T -invariante** de V .

Proposição 10 (Exemplos). *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e sejam $W \subset V$ um subespaço de V e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então*

1. *Os subespaços vetoriais de V , núcleo $\ker(T)$ e imagem $\text{Im}(T)$ são T -invariantes.*
2. *Se W é um subespaço T -invariante, então a restrição de T a W é um operador linear $T|_W : W \rightarrow W$.*
3. *W é $(\lambda I - T)$ -invariante se, e só se, W for T -invariante.*

O estudo de subespaços invariantes de um espaço vetorial V por um operador linear $T : V \rightarrow V$ é útil, pois nos permite encontrar uma base para o espaço vetorial na qual a matriz de T pode ser escrita em blocos, como podemos ver a partir do seguinte teorema.

Teorema 11. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão n , tais que $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$, onde cada W_i é um subespaço T -invariante. Seja também $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ uma base de V , com $\mathcal{B}_i$ base de W_i . Então $[T]_{\mathcal{B}}$ se escreve da seguinte maneira:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T_1]_{\mathcal{B}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{\mathcal{B}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & [T_r]_{\mathcal{B}_r} \end{pmatrix},$$

onde $[T_i]_{\mathcal{B}_i}$ é a matriz da restrição $T_i := T|_{W_i}$.

Demonstração. Considere $\mathcal{B}_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\}$, ordenando a base como $\mathcal{B} = \{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, \dots, v_{r1}, \dots, v_{rn_r}\}$. Seja $v_{ij} \in \mathcal{B}$. Temos

$$T(v_{ij}) = a_{11}v_{11} + \dots + a_{1n_1}v_{1n_1} + \dots + a_{r1}v_{r1} + \dots + a_{rn_r}v_{rn_r} \quad \text{com } a_{ts} \in \mathbb{K}.$$

Como $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ e W_i é T -invariante para $i = 1, \dots, r$, segue que $a_{ts} = 0$ se $t \neq i$. Logo a matriz fica em blocos diagonais, como no enunciado. $\square$

Deste último teorema temos que o operador linear T é soma direta dos operadores $T_1, \dots, T_r$, onde cada operador T_i está definido em um espaço vetorial de dimensão menor que $\dim_{\mathbb{K}} V$. Nosso próximo objetivo será encontrar uma decomposição conveniente para T . Para isso, o nosso primeiro passo será estudar o polinômio característico de um operador linear.

Corolário 12. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial. Se $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r$, então o polinômio característico de T é dado por $p_T(x) = p_{T_1}(x) \cdots p_{T_r}(x)$.*

Teorema 13 (Cayley-Hamilton). *Seja V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$.*

Além do polinômio característico, existe outro polinômio importante associado a um operador linear T .

Definição 14. Chamamos de **polinômio minimal** de um operador linear $T : V \rightarrow V$ o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T) = 0$.

Veremos a seguir algumas relações entre esses polinômios que decorrem do Teorema de Cayley-Hamilton.

Corolário 15. *O polinômio minimal $m_T(x)$ de T é um divisor do polinômio característico $p_T(x)$ de T .*

Demonstração. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos $p_T(T) = 0$. Pela definição de polinômio minimal, $\deg m_T \leq \deg p_T$. Aplicando o algoritmo da divisão,

$$p_T(x) = q(x)m_T(x) + r(x), \text{ com } r(x) = 0 \text{ ou } \deg r < \deg m_T. \quad (1)$$

Aplicando (1) em T , obtemos $r(T) = 0$. Pela minimalidade de m_T , segue que $r = 0$, logo m_T divide p_T . $\square$

Corolário 16. *Os polinômios característico e minimal de T têm as mesmas raízes, a menos de multiplicidade.*

Demonstração. Pelo resultado anterior, toda raiz de m_T é raiz de p_T . Reciprocamente, seja λ raiz de p_T . Então λ é autovalor de T , e existe $v \neq 0$ com $T(v) = \lambda v$. Para cada $i \geq 1$, $T^i(v) = \lambda^i v$. Escrevendo $m_T(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$, temos

$$0 = m_T(T)(v) = \left(\sum_{i=0}^m a_i T^i \right) (v) = \left(\sum_{i=0}^m a_i \lambda^i \right) v.$$

Como $v \neq 0$, segue que $m_T(\lambda) = 0$. $\square$

A seguir definiremos operadores nilpotentes, pois eles serão a pedra fundamental para construção de formas de Jordan.

Definição 17. Um operador linear $T : V \rightarrow V$ é chamado de **nilpotente** se existir um inteiro positivo m tal que $T^m = 0$. O menor índice com esta propriedade é dito **índice de nilpotência**.

Exemplo 5. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e β uma base de V tal que a matriz de T na base β é escrita por

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Tal matriz é nilpotente, com índice (de nilpotência) k .

Usaremos o resultado a seguir para ver que todo operador linear em um espaço de dimensão finita, pode ser escrito como soma de um operador nilpotente.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre um corpo F . Para qualquer operador linear $T \in \text{End}_F(V)$, existe uma decomposição do espaço em termos de subespaços T -invariantes baseada na estabilização de suas potências.

Lema 18 (Decomposição de Fitting). *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Existe um inteiro $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que:*

$$V = \ker(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$$

onde $T|_{\ker(T^k)}$ é um operador nilpotente e $T|_{\text{Im}(T^k)}$ é um automorfismo.

Demonstração. Consideramos as sequências de subespaços de V :

$$\ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \ker(T^3) \subseteq \dots$$

$$\text{Im}(T) \supseteq \text{Im}(T^2) \supseteq \text{Im}(T^3) \supseteq \dots$$

Como $\dim V = n$, a sequência de dimensões dos núcleos é não-decrescente e limitada por n . Logo, existe um menor inteiro $k \leq n$ tal que $\dim \ker(T^k) = \dim \ker(T^{k+1})$. Pela inclusão, temos $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$.

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, como $\dim \ker(T^k) + \dim \text{Im}(T^k) = n$, a estabilização do núcleo implica a estabilização da imagem: $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1})$.

Agora, para provar que $V = \ker(T^k) \oplus \text{Im}(T^k)$, mostramos que a interseção é trivial. Seja $v \in \ker(T^k) \cap \text{Im}(T^k)$.

1. Como $v \in \text{Im}(T^k)$, existe $w \in V$ tal que $v = T^k(w)$.
2. Como $v \in \ker(T^k)$, temos $T^k(v) = 0$, logo $T^k(T^k(w)) = T^{2k}(w) = 0$.
3. Assim, $w \in \ker(T^{2k})$. Como a cadeia estabilizou em k , $\ker(T^{2k}) = \ker(T^k)$.

4. Portanto, $w \in \ker(T^k)$, o que implica $v = T^k(w) = 0$.

Como $\ker(T^k) \cap \text{Im}(T^k) = \{0\}$ e a soma das dimensões é n , segue a soma direta. Como queríamos.

Em seguida, como por definição, para todo $v \in \ker(T^k)$, $T^k(v) = 0$, temos que restrição é nilpotente. Por fim, Seja $T' = T|_{\text{Im}(T^k)}$. Como $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1})$, vemos que T' é sobrejetor sobre um espaço de dimensão finita, logo T' é um isomorfismo. $\square$

Com isso, podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 19 (Decomposição de Fitting). *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Então V admite uma decomposição única em soma direta de subespaços T -invariantes:*

$$V = N_T \oplus I_T$$

tal que a restrição $T|_{N_T}$ é um operador nilpotente e a restrição $T|_{I_T}$ é um operador invertível.

Demonstração. 1. Existência: Considere as sequências de subespaços $\ker(T^m)$ e $\text{Im}(T^m)$. Como $\dim V < \infty$, existe um menor inteiro $k \geq 0$ (o índice de Fitting) tal que as sequências se estabilizam, isto é, $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$ e $\text{Im}(T^k) = \text{Im}(T^{k+1})$. Definimos:

$$N_T = \ker(T^k) \quad \text{e} \quad I_T = \text{Im}(T^k)$$

Pelo Lema de Fitting, $V = N_T \oplus I_T$. Além disso:

- N_T e I_T são T -invariantes, pois T comuta com suas próprias potências T^k .
- $T|_{N_T}$ é nilpotente, visto que para todo $v \in \ker(T^k)$, temos $T^k(v) = 0$.
- $T|_{I_T}$ é invertível, pois $T(\text{Im}(T^k)) = \text{Im}(T^{k+1}) = \text{Im}(T^k)$, o que mostra que a restrição é sobrejetora e, por dimensão finita, um automorfismo.

2. Unicidade: Suponha que exista outra decomposição $V = H \oplus K$ em subespaços T -invariantes tal que $T|_H$ é nilpotente e $T|_K$ é invertível.

- Seja m o índice de nilpotência de $T|_H$. Então $H \subseteq \ker(T^m)$. Pela estabilização da cadeia de núcleos, $\ker(T^m) \subseteq \ker(T^k) = N_T$, logo $H \subseteq N_T$.
- Como $T|_K$ é invertível, $T^k|_K$ também é invertível. Assim, $K = T^k(K) \subseteq \text{Im}(T^k) = I_T$, logo $K \subseteq I_T$.

Como $V = H \oplus K = N_T \oplus I_T$ com as inclusões $H \subseteq N_T$ e $K \subseteq I_T$, as dimensões devem coincidir: $\dim H = \dim N_T$ e $\dim K = \dim I_T$. Portanto, $H = N_T$ e $K = I_T$. $\square$

Esse resultado é o principal ingrediente que precisamos para construir as bases de Jordan.

Proposição 20. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice $r \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Se $v_0 \in V$ é tal que $T^{r-1}(v_0) \neq 0$, então:*

1. $\lambda = 0$ é o único autovalor de T .
2. O conjunto $\{v_0, T(v_0), \dots, T^{r-1}(v_0)\}$ é linearmente independente.

Demonstração. 1. Se $T(v) = \lambda v$ com $v \neq 0$, então $0 = T^r(v) = \lambda^r v$, logo $\lambda = 0$.

2. Sejam $\alpha_i \in \kappa$ tais que $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 T(v_0) + \dots + \alpha_{r-1} T^{r-1}(v_0) = 0$. Suponha que exista um escalar não nulo, sem perda de generalidade, seja α_s o primeiro escalar não nulo. Assim, $\alpha_s T^s(v_0) + \dots + \alpha_{r-1} T^{r-1}(v_0) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} T^s(v_0) &= -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} T^{s+1}(v_0) - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} T^{r-1}(v_0) \\ &= T^{s+1} \left(\underbrace{-\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} (v_0) - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} T^{r-s-2}(v_0)}_v \right). \end{aligned}$$

Portanto, $T^s(v_0) = T^{s+1}(v)$, para o v descrito acima. Segue que

$$T^{r-1}(v_0) = T^{r-1-s}(T^s(v_0)) = T^{r-1-s}(T^{s+1}(v)) = T^r(v) = 0,$$

uma contradição, pois $T^{r-1}(v_0) \neq 0$. Logo não existe tão escalar não nulo e os vetores são linearmente independentes.

□

Faremos a seguir uma série de observações para motivar nosso resultado principal.

Observação 21. 1. Suponha que $T : V \rightarrow V$ é nilpotente de índice m . Pela Proposição 20, a família $\{T^{m-1}(v), T^{m-2}(v), \dots, T(v), v\}$ é LI, para algum $v \in V$ com $T^{m-1}(v) \neq 0$. Se ordenarmos esta família ao contrário, isto é,

$$\mathcal{B} = \{T^{m-1}(v), T^{m-2}(v), \dots, T(v), v\},$$

então a matriz de T em $\mathcal{B}$ tem 1 na superdiagonal (a convenção mais comum):

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

2. Suponha agora que $p_T(x) = (x-\lambda)^n$. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, $(T - \lambda I)^n = 0$ e, portanto, $(T - \lambda I)$ é nilpotente. Se seu índice de nilpotência for n , então, escolhendo uma base como no item anterior para

$(T - \lambda I)$, obtemos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{n \times n}.$$

As observações acima justificam a próxima definição.

Definição 22. Chamamos de **bloco de Jordan** $r \times r$ em λ a matriz $J_r(\lambda) \in \mathbb{M}_r(\mathbb{K})$ que tem λ em toda diagonal principal e 1 em toda superdiagonal, isto é,

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r}.$$

Definição 23. Uma matriz $J \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ é dita **matriz de Jordan** se J é formada por blocos de Jordan $J_{n_1}(\lambda_1), J_{n_2}(\lambda_2), \dots, J_{n_s}(\lambda_s)$ colocados sob forma diagonal:

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

O seguinte lema será útil no que se segue.

Lema 24. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente de índice $m \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então:*

1. Existe um subespaço T -invariante W de V tal que $V = U \oplus W$, onde $U = \langle v, T(v), \dots, T^{m-1}(v) \rangle$.
2. A restrição $T|_W : W \rightarrow W$ é nilpotente, com índice de nilpotência $m' \leq m$.

Demonstração. Defina $u_j := T^j(v)$ para $j = 0, \dots, m-1$ e $U = \langle u_0, \dots, u_{m-1} \rangle$. Pela Proposição 20, $(u_0, \dots, u_{m-1})$ é LI e U é T -invariante.

Escolha uma forma linear $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f(u_{m-1}) = 1$. Defina $P : V \rightarrow U$ por

$$P(x) := \sum_{j=0}^{m-1} f(T^{m-1-j}x) u_j.$$

Então P é um projetor sobre U : para $x = u_s$,

$$P(u_s) = \sum_{j=0}^{m-1} f(T^{m-1-j}u_s) u_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(u_{s+m-1-j}) u_j = u_s,$$

pois $u_{s+m-1-j} = 0$ quando $s + m - 1 - j \geq m$, e o único termo não nulo ocorre em $j = s$, dando $f(u_{m-1})u_s = u_s$.

Além disso, P comuta com T (isto é, $PT = TP$), pois

$$PT(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f(T^{m-1-j}Tx) u_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(T^{m-j}x) u_j$$

e

$$TP(x) = \sum_{j=0}^{m-1} f(T^{m-1-j}x) T(u_j) = \sum_{j=0}^{m-2} f(T^{m-1-j}x) u_{j+1} = \sum_{j=1}^{m-1} f(T^{m-j}x) u_j,$$

que coincide com $PT(x)$ (o termo $j = 0$ é nulo pois envolve T^m). Portanto $W := \ker(P)$ é T -invariante e

$$V = \operatorname{Im}(P) \oplus \ker(P) = U \oplus W.$$

Por fim, $T|_W$ é nilpotente por ser restrição de um nilpotente, e seu índice é $\leq m$. □

Teorema 25. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números positivos $t, m_1, m_2, \dots, m_t$ e vetores $v_1, \dots, v_t \in V$ tais que*

1. $m = m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_t$.

2. O conjunto

$$\mathcal{B} = \{T^{m_1-1}(v_1), \dots, T(v_1), v_1, \dots, T^{m_t-1}(v_t), \dots, T(v_t), v_t\}$$

é uma base de V .

3. $T^{m_i}(v_i) = 0$, para cada $i = 1, \dots, t$.

Demonstração. Como $T^{m-1} \neq 0$, existe $v_1 \in V$ tal que $T^{m-1}(v_1) \neq 0$, pelo Lema 20, $\beta_1 = \{T^{m-1}(v_1), T^{m-2}(v_1), \dots, T(v_1), v_1\}$ é LI. Seja $W_1 = \langle \beta_1 \rangle$, como W_1 é T -invariante, segue pelo Lema 24, segue que existe $W'_2 \subset V$ T -invariante, tal que $V = W_1 \oplus W'_2$. Faça $m_1 = m$, e $T_2 = T|_{W'_2}$. É claro que T_2 é nilpotente com índice de nilpotência $m_2 \leq m_1$. Repetindo o argumento, anterior, temos que existem $v_2 \in W'_2$, $v_2 \neq 0$ tal que $\beta_2 = \{T^{m_2-1}(v_2), T^{m_2-2}(v_2), \dots, T(v_2), v_2\}$ é LI, e $W'_3 \subset W'_2$ tal que $W'_2 = W_2 \oplus W'_3$ com $W_2 = \langle \beta_2 \rangle$. Repetindo este procedimento, como $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$, chega-se aos valores $t, m_1, \dots, m_t$. $\square$

Para um operador linear nilpotente $T : V \rightarrow V$, sejam $t, m_1, \dots, m_t$ e $\mathcal{B}$ como no Teorema 25. Então a matriz de T na base $\mathcal{B}$ é formada por blocos

$$J_{m_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{m_i \times m_i}.$$

Agora usaremos esses resultados para construir a forma de Jordan.

Teorema 26 (Decomposição primária). *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, tal que*

$$p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r},$$

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r},$$

com $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Então

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

onde

$$U_i = \ker(T - \lambda_i I)^{m_i}.$$

Além disso:

1. $\dim U_i = m_i$;
2. U_i é T -invariante;
3. $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é nilpotente, com índice de nilpotência k_i .

Demonstração. Para cada $i = 1, \dots, r$, definimos

$$U_i := \ker(T - \lambda_i I)^{m_i}.$$

Como $(T - \lambda_i I)$ comuta com T , segue que U_i é T -invariante.

Por definição, $(T - \lambda_i I)^{m_i} = 0$ em U_i , logo $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é nilpotente.

Pelo Teorema 11, temos

$$p_T(x) = \prod_{i=1}^r p_{T|_{U_i}}(x).$$

Como λ_i é o único autovalor de $T|_{U_i}$ (pois $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é nilpotente), segue que

$$p_{T|_{U_i}}(x) = (x - \lambda_i)^{\dim U_i}.$$

Comparando com a fatoração de $p_T(x)$, concluímos que $\dim U_i = m_i$.

Resta mostrar que a soma $U_1 + \cdots + U_r$ é direta. Para cada i , defina

$$q_i(x) = \prod_{j \neq i} (x - \lambda_j)^{m_j}.$$

Como $\text{mdc}((x - \lambda_i)^{m_i}, q_i(x)) = 1$, existem polinômios $a_i(x), b_i(x)$ tais que

$$a_i(x)(x - \lambda_i)^{m_i} + b_i(x)q_i(x) = 1.$$

Avaliando em T obtemos

$$a_i(T)(T - \lambda_i I)^{m_i} + b_i(T)q_i(T) = I.$$

Denote $P_i = b_i(T)q_i(T)$.

Se $v \in U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j$, escreva $v = \sum_{j \neq i} u_j$ com $u_j \in U_j$. Aplicando P_i , temos:

- Para $j \neq i$, $q_i(T)$ contém o fator $(T - \lambda_j I)^{m_j}$, que anula u_j , logo $P_i(u_j) = 0$.
- Para $v \in U_i$, temos $(T - \lambda_i I)^{m_i} v = 0$, então da identidade polinomial segue $P_i(v) = v$.

Assim,

$$v = P_i(v) = \sum_{j \neq i} P_i(u_j) = 0.$$

Portanto, $U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$ para cada i , e como $\sum_{i=1}^r \dim U_i = \dim V$, concluímos

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r.$$

Índice de nilpotência: Seja $m_T(x) = (x - \lambda_1)^{k_1} \cdots (x - \lambda_r)^{k_r}$ o polinômio minimal de T . Como $m_T(T) = 0$, em particular $m_T(T)|_{U_i} = 0$. Para $j \neq i$, o operador $(T - \lambda_j I)|_{U_i}$ é invertível (pois λ_j não é autovalor de $T|_{U_i}$), logo o fator $(T - \lambda_j I)^{k_j}$ é invertível em U_i . Portanto, a restrição de $m_T(T)$ a U_i é equivalente, a menos de um fator invertível, a $(T - \lambda_i I)^{k_i}|_{U_i}$. Consequentemente, $(T - \lambda_i I)^{k_i}|_{U_i} = 0$, e k_i é o menor expoente com essa propriedade

(caso contrário, poderíamos construir um polinômio de grau menor que anula T , contradizendo a minimalidade de $m_T(x)$). Assim, o índice de nilpotência de $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é exatamente k_i .

□

Definição 27. Cada um dos U_i acima definidos são chamados de autoespaços generalizados de T

Por fim, temos o resultado principal dessas notas:

Teorema 28. *Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear e V um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita, com $\mathbb{K}$ um corpo algebricamente fechado. Então existe uma base $\mathcal{B}$ de V tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz de Jordan.*

Demonstração. Pelo Teorema 26, temos

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r,$$

onde cada U_i é T -invariante e o operador $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é nilpotente.

Aplicando o Teorema 25 ao operador nilpotente $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$, obtemos uma base $\mathcal{B}_i$ de U_i na qual a matriz de $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é soma direta de blocos de Jordan nilpotentes. Consequentemente, a matriz de $T|_{U_i}$ nessa base é soma direta de blocos de Jordan associados ao autovalor λ_i .

Como V é soma direta dos U_i , a união das bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ forma uma base $\mathcal{B}$ de V . Nessa base, a matriz de T é uma matriz de Jordan. □

Como uma consequência direta do Teorema 26, o maior bloco de Jordan associado a λ_i terá tamanho exatamente k_i . Nosso próximo objetivo é provar que a forma de Jordan encontrada no resultado anterior é única a menos de mudança de ordem dos blocos. Precisaremos do seguinte lema

Lema 29. *Seja $N : W \rightarrow W$ um operador nilpotente cuja forma de Jordan possui blocos de tamanhos*

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_\ell.$$

Para cada $k \geq 1$, vale

$$\dim \ker N^k = \sum_{j=1}^{\ell} \min\{k, s_j\}.$$

Demonstração. Escreva W como soma direta dos subespaços invariantes associados aos blocos de Jordan:

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{\ell},$$

onde $\dim W_j = s_j$ e $N|_{W_j}$ é representado por um bloco de Jordan nilpotente de tamanho s_j .

Como N^k preserva cada W_j , temos

$$\ker N^k = \ker(N^k|_{W_1}) \oplus \cdots \oplus \ker(N^k|_{W_{\ell}}),$$

e, portanto,

$$\dim \ker N^k = \sum_{j=1}^{\ell} \dim \ker(N^k|_{W_j}).$$

Fixemos $j \in \{1, \dots, \ell\}$. Seja $\{e_1, \dots, e_{s_j}\}$ uma base de W_j tal que

$$N(e_1) = 0, \quad N(e_2) = e_1, \quad \dots, \quad N(e_{s_j}) = e_{s_j-1}.$$

Então, para todo $k \geq 1$,

$$N^k(e_i) = \begin{cases} 0, & \text{se } i \leq k, \\ e_{i-k}, & \text{se } i > k. \end{cases}$$

Logo,

$$\ker(N^k|_{W_j}) = \langle e_1, \dots, e_{\min\{k, s_j\}} \rangle,$$

e, portanto,

$$\dim \ker(N^k|_{W_j}) = \min\{k, s_j\}.$$

Somando sobre $j = 1, \dots, \ell$, obtemos

$$\dim \ker N^k = \sum_{j=1}^{\ell} \min\{k, s_j\}.$$

□

Além disso, o próximo resultado será útil para calcular na prática o número de blocos de Jordan.

Lema 30. *Seja $N : W \rightarrow W$ um operador nilpotente e, para cada $k \geq 1$, seja*

$$d_k := \dim \ker N^k.$$

Então o número de blocos de Jordan de N de tamanho maior ou igual a k é igual a

$$d_k - d_{k-1},$$

com a convenção $d_0 = 0$.

Demonstração. Pelo Lema 29, se a forma de Jordan de N possui blocos de tamanhos

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_\ell,$$

então

$$d_k = \sum_{j=1}^{\ell} \min\{k, s_j\} \quad \text{e} \quad d_{k-1} = \sum_{j=1}^{\ell} \min\{k-1, s_j\}.$$

Logo,

$$d_k - d_{k-1} = \sum_{j=1}^{\ell} (\min\{k, s_j\} - \min\{k-1, s_j\}).$$

Fixemos j . Se $s_j \geq k$, então

$$\min\{k, s_j\} = k \quad \text{e} \quad \min\{k-1, s_j\} = k-1,$$

logo

$$\min\{k, s_j\} - \min\{k-1, s_j\} = 1.$$

Se, por outro lado, $s_j < k$, então

$$\min\{k, s_j\} = \min\{k-1, s_j\} = s_j,$$

logo

$$\min\{k, s_j\} - \min\{k-1, s_j\} = 0.$$

Portanto,

$$\min\{k, s_j\} - \min\{k-1, s_j\} = \begin{cases} 1, & \text{se } s_j \geq k, \\ 0, & \text{se } s_j < k. \end{cases}$$

Somando sobre $j = 1, \dots, \ell$, concluímos que $d_k - d_{k-1}$ é exatamente o número de índices j tais que $s_j \geq k$, isto é, o número de blocos de Jordan de tamanho maior ou igual a k . $\square$

Agora podemos provar nosso resultado principal

Teorema 31 (Unicidade da forma de Jordan). *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$ -espaço vetorial de dimensão finita e $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado. Então a forma de Jordan de T é única a menos da ordem dos blocos.*

Demonstração. Pelo Teorema 26, temos a decomposição primária

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r,$$

onde, para cada $i = 1, \dots, r$:

1. $\dim U_i = m_i$;
2. U_i é T -invariante;
3. $(T - \lambda_i I)|_{U_i}$ é nilpotente;
4. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ são os autovalores distintos de T .

Observamos que

$$U_i = \ker(T - \lambda_i I)^{m_i}.$$

De fato, como $(T - \lambda_i I)$ é nilpotente em U_i e invertível em $\bigoplus_{j \neq i} U_j$, segue que $\ker(T - \lambda_i I)^k = U_i$ para todo $k \geq m_i$. Logo, cada U_i é determinado unicamente por T . Assim, a decomposição primária de V é única.

Fixemos agora $i \in \{1, \dots, r\}$ e consideremos o operador

$$N_i := (T - \lambda_i I)|_{U_i}.$$

Pelo item (3), N_i é nilpotente. Pelo Teorema 28, existe uma base $\mathcal{B}_i$ de U_i na qual a matriz de $T|_{U_i}$ é soma direta de blocos de Jordan associados ao autovalor λ_i , ou seja, a matriz de N_i nessa base é soma direta de blocos de Jordan nilpotentes.

Assim, para provar a unicidade da forma de Jordan de T , basta provar a unicidade da forma de Jordan de operadores nilpotentes.

Seja então $N : W \rightarrow W$ um operador nilpotente. Para cada $k \geq 1$, definimos

$$d_k := \dim \ker N^k.$$

Os números d_k dependem apenas de N e satisfazem (veja Lema 18)

$$0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq \dim W.$$

Suponha que a forma de Jordan de N possui blocos de tamanhos

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_\ell.$$

Então pelo Lema 29 temos que

$$d_k = \sum_{j=1}^{\ell} \min\{k, s_j\}.$$

E, pelo Lema 30, o número de blocos de Jordan de tamanho maior ou igual

a k é dado por

$$d_k - d_{k-1},$$

Com a convenção de que $d_0 = 0$. Logo, a sequência $(s_1, \dots, s_\ell)$ é completamente determinada pelos números d_k , os quais são invariantes do operador N .

Concluimos que os tamanhos dos blocos de Jordan de N são únicos (a menos da ordem). Como isso vale para cada restrição $T|_{U_i}$, segue que a forma de Jordan de T é única a menos da permutação dos blocos. $\square$

Por fim, podemos enunciar o seguinte resultado:

Corolário 32. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e λ um autovalor de T . Então o número de blocos de Jordan associados a λ é igual a*

$$\dim \ker(T - \lambda I).$$

Demonstração. Pelo Teorema 26, o subespaço

$$U_\lambda = \ker(T - \lambda I)^{m_\lambda}$$

é T -invariante e o operador

$$N = (T - \lambda I)|_{U_\lambda}$$

é nilpotente.

Pelo Teorema 25, N admite uma decomposição em blocos de Jordan nilpotentes. Cada bloco de Jordan contribui com exatamente um vetor para $\ker N$, logo

$$\dim \ker N$$

é o número de blocos de Jordan de N .

Como $\ker N = \ker(T - \lambda I)$, o resultado segue. $\square$

Exemplo 6. A observação anterior nos permite classificar **TODAS** as matrizes em $M_n(\mathbb{K})$, com $\mathbb{K}$ algebricamente fechado, a menos de conjugação.

Por exemplo, se $n = 2$ e $M \in M_2(\mathbb{K})$ então M é semelhante a uma das seguintes matrizes:

1. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.

2. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, com $\lambda_1 \in \mathbb{K}$.